

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/388847116>

Alternativ, aproximativ, adimensional

Book · February 2025

CITATIONS

0

READS

133

1 author:



[Claudiu Patrascu](#)

Universitatea Națională de Știință și Tehnologie Politehnica București

40 PUBLICATIONS 118 CITATIONS

SEE PROFILE

ΠΠΠΠΠΠ

ALTERNATIV, APROXIMATIV
ADIMENSIONAL

editura
POLITEHNICA
PRESS



978-630-339-007-9

Claudiu Pătrașcu

Π Π Π Π Π Π

ΠΠΠΠΠΠ

ALTERNATIV, APROXIMATIV,
ADIMENSIONAL

Claudiu Pătrașcu

București, 2025

editura
POLITEHNICA
PRESS

ISBN: 978-630-339-007-9

Copyright © 2025, Politehnica Press
Toate drepturile asupra acestei ediții
sunt rezervate editurii.

Adresă: Calea Griviței, 132
10737, Sector 1, București
Telefon: 021.402.90.74

Referenți științifici:
Conf. dr. ing. Cristina Sorana Ionescu
Prof. dr. ing. Sanda Carmen Georgescu

ISBN: 978-630-339-007-9

*A water beetle finds the surface of a pool a matter of life and death,
a perilous entanglement or an indispensable support.*

D'Arcy Thomson

- meditănd asupra unor chestiuni ce țin de scară -

Preambul

Orice teorie nouă despre Natură mai întâi se ghicește! În acest caz, intuiția joacă un rol la fel de important ca dovezile experimentale. La fel se întâmplă și cu relația funcțională prin intermediul căreia se caută grupurile adimensionale relevante.

Analiza dimensională este o metodă prin care problemele fizice cu grad ridicat de complexitate se reduc la o variantă mai simplă, păstrând totodată fizica dominantă din spatele fenomenului. Prin reducerea gradelor de libertate se poate obține o caracteristică intrinsecă a sistemului studiat, de multe ori cu valență universală în context fizic general. Nu cunosc un domeniu științific în care analiza dimensională să nu poată fi aplicată, mai ales dacă vorbim de studii exploratorii pentru care ecuațiile de mișcare sau condițiile la limită nu sunt (încă) bine conturate.

Cartea este o variantă concentrată a unui curs introductiv în analiza de scară și vine în sprijinul celor care caută o înțelegere fundamentală a dinamicii fluidelor prin analiză dimensională sau al celor care caută să dezvolte valențe creative din punct de vedere științific într-o lume dominată de cunoștințe procedurale.

Rezultatul obținut prin analiză dimensională se *șlefuieste* prin experiment, sugerează o **alternativă** la soluția ecuațiilor de mișcare (atunci când se poate obține!) și reprezintă o **aproximare** sub formă **adimensională** a substratului fizic dominant, uneori cu caracter universal! Dacă fizica din spatele fenomenului este identificată corect, o ecuație în formă adimensională este invariantă față de scară, de cinematică, de material, de orgoliu, de aspirații sau de polemici și reprezintă o caracteristică intrinsecă a Naturii, independentă de observator.

ΠΠΠΠΠΠ

Cuprins

Cinci mărimi fizice cu trei consecințe	8
Despre intuiție	12
Un sistem de măsură impus de Natură	19
Grupuri adimensionale în mecanica fluidelor	21
Forțe, eforturi sau acțiuni ca ordin de mărime	21
Scări spațiale și temporale caracteristice	23
Un număr adimensional de ținut minte	25
Lista unor numere adimensionale care se uită	26
O serie de întrebări cu răspuns prin analiză dimensională	30
Răspunsuri clasice în mecanica fluidelor	30
Forțe de rezistență la înaintare	30
Relația Hagen-Poiseuille	32
Pierderi de presiune	33
Aleea de vârtejuri Kármán	34
Cascada energetică turbulentă	35
Lungime de stabilizare a curgerii	36
Curgeri incompresibile ale fluidelor compresibile	37
Numere adimensionale în reologie	38
Convecție, conducție, curgere	41
Fenomene interfaciale	42
Lungimea de rupere a jeturilor lichide	42
Relații de dispersie și unde dominante	44
Frecvențe naturale de vibrație a picăturilor	45
Dinamica filamentelor subțiri	46
Impactul picăturilor cu suprafețe perforate	46
Acoperire în straturi subțiri prin extragere	47
Curgeri Marangoni	48
Un exemplu de estimare a graniței ce separă regimurile de curgere	49

Procese de transport în medii fiziologice	50
Forțe de rezistență la înaintarea leucocitelor	50
Debit tranzitat prin porii unei membrane	51
Spermatozoizi și heringi	51
Viscozitatea citoplasmei	52
Presiunea necesară pentru ejaculare	53
Viteze de sedimentare	54
Presiunea necesară pentru golirea stomacului – un caz tipic de exces	56
Timpul de evacuare a materiilor fecale în cele mai urgente situații .	57
Conductivitatea hidraulică a unei membrane poroase	58
Curgerea sângelui printr-o valvă eliptică	59
Golirea unei seringi sub acțiunea câmpului gravitațional	60
Pragul sistolic impus de câmpul gravitațional	61
Hemodializă	62
Scalare prin similitudine	63
Un model de scară pentru determinarea efortului tangențial în capilare	63
O demonstrație a teoremei lui Pitagora prin analiză dimensională .	64
Picături la o scară neobișnuit de mare	65
Uneori nu va trebui să rezolvi ecuația dacă apelezi la ordine de mărime	66
Legea a treia a lui Kepler – o aproximare a masei Soarelui	68
Similitudine Froude	69
Ecuații de mișcare în formă adimensională	71
Variante ale ecuației Navier-Stokes	71
Transformările de scară nu trebuie să modifice ecuația	74
Ecuația difuzie-advecție	75
Prima lege a termodinamicii într-o variantă adimensională	76
Ecuația Lucas-Washburn pentru capilaritate	77
Curgere cu suprafață liberă peste un obstacol	79
Unde capilare sau unde masice?	80
O variantă adimensională a ecuației lui Bernoulli	81
Sisteme atipice de unități fundamentale	83
Sistemul de unități Ohnesorge	83
Un sistem de unități bazat pe lungimea capilară	86
Index – grupuri adimensionale	92
Bibliografie	96

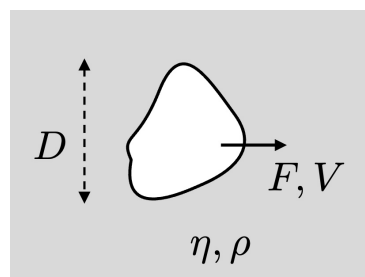
Cinci mărimi fizice cu trei consecințe

Deplasarea unui corp printr-un mediu fluid implică dezlocuirea acelui fluid și implicit un transfer de impuls. Corpul va *simți* acest fenomen ca pe o rezistență la înaintare. Avioanele, păsările, bacteriile, practic orice corp care se deplasează printr-un mediu fluid va resimți o rezistență la înaintare. Putem estima forța pe care va trebui să o dezvolte corpul pentru a se deplasa cu viteză constantă prin acel mediu fluid fără a cunoaște mai nimic despre ecuațiile de mișcare ce guvernează procesul. Iată cum!

Să mișcăm un corp solid având dimensiunea caracteristică D cu viteza constantă V printr-un mediu fluid cu densitate ρ și viscozitate η . Interacțiunea dintre corp și fluid va da naștere unei forțe de rezistență la înaintare, F_R . Forța F , cu care va trebui să acționăm pentru a deplasa corpul cu viteză constantă, va fi egală cu F_R . Fără a cunoaște ecuațiile de mișcare, putem spune în ce mod depinde această forță de cele patru mărimi fizice care constituie baza fizică a problemei?

Cele cinci mărimi fizice relevante impun următoarea formă funcțională (un mod de a scrie matematic F depinde de...):

$$F = f(D, V, \rho, \eta). \quad (1)$$



Adevărul este că nu-ți va spune nimeni care sunt mărimile fizice relevante. Se ghicesc! Secretul este să capeti experiență (prin studiu!) ca să ghicești bine.

Cele cinci mărimi fizice relevante se reduc la o serie de mărimi fizice fundamentale:

$$[F] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}, \quad [D] = \text{m}, \quad [V] = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad [\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}, \quad (2)$$

trei la număr: masă, lungime și timp (M, L și T). Cinci mărimi relevante, trei fundamentale. Diferența, $5 - 3 = 2$, ar trebui să ne spună ceva? Diferența ne indică numărul de grupuri adimensionale care se pot forma cu cele cinci mărimi fizice relevante. Cele trei mărimi fizice fundamentale identificate (nu întotdeauna vor fi

trei!) – masă, lungime și timp – impun și numărul de mărimi fizice necesare pentru a forma cele două grupuri adimensionale. Va trebui să alegem trei mărimi de bază din cele cinci, însă mărimea fizică pentru care se caută o relație teoretică (explicită) nu se alege printre acestea! Ne rămân patru: D, V, ρ și η . Putem forma $C_4^3 = 4$ variante:

$$(\rho, V, D), (\eta, V, D), (\rho, \eta, D), (\rho, \eta, V). \quad (3)$$

De fiecare dată rămân două mărimi fizice cu care vom forma cele două grupuri adimensionale, grupuri care ne vor dezvălui ce anume influențează forța F , dar și cum se modifică aceasta ca urmare a variației mărimilor fizice relevante. Relația pe care o vom obține va răspunde (și) la întrebarea: Dacă viteza fluidului crește de două ori, de câte ori se modifică forța de rezistență la înaintare (egală cu F întrucât corpul se deplasează cu viteză constantă)?

Să atacăm prima variantă: ρ, V, D ca mărimi de bază. Grupurile adimensionale se determină astfel încât produsele

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F \quad \text{și} \quad \Pi_2 = \rho^a V^b D^c \eta \quad (4)$$

să fie adimensionale (fără unitate de măsură). Observați faptul că mărimile nealese în bază, nu au o putere atașată. Aici, ne putem folosi de unitățile de măsură impuse de Sistemul Internațional pentru a determina cele trei puteri. Voi detalia această etapă o singură dată, întrucât s-au scris lucrări ample pe acest subiect (vezi Bibliografie). Celelalte rămân ca exercițiu pentru cei care se simt suficient de motivați.

Cele trei mărimi fizice fundamentale identificate anterior (masă, lungime și timp) se scriu într-o formă prescurtată (kilogram – M , metru – L , timp – T). Pentru primul grup adimensional obținem

$$(ML^{-3})^a (LT^{-1})^b L^c (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0 \rightarrow a = -1, b = -2, c = -2. \quad (5)$$

Se repetă procedura pentru toate grupurile adimensionale. Se obțin

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} \quad \text{și} \quad \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho V D} \rightarrow F = \rho V^2 D^2 f(1/\text{Re}), \quad (6)$$

unde raportul

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\eta}, \quad (7)$$

definește, de regulă, singurul grup adimensional care se ține minte, numărul Reynolds.

Pentru cea de-a doua variantă, η, V, D ca mărimi de bază, vom găsi următoarele grupurile adimensionale

$$\Pi_1 = \frac{F}{\eta V D} \text{ și } \Pi_2 = \text{Re} \rightarrow F = \eta V D f(\text{Re}). \quad (8)$$

Obținem două relații de calcul, $F \sim \rho V^2 D^2$ și $F \sim \eta V D$, ambele fundamentale diferite. Prima ne arată faptul că o dublare a vitezei implică o rezistență de patru ori mai mare, în timp ce a doua implică o dublare a rezistenței în raport cu viteza. Care este cea corectă? Ambele! Dar nu ambele în aceleași condiții. Prima relație se folosește atunci când forțele de inerție ($\rho V^2 D^2$) sunt mai mari ca forțele de frecare datorate viscozității ($\eta V D$). Interesant de observat faptul că raportul celor două expresii va da numărul Reynolds. Deci, la numere Reynolds mari vom folosi prima variantă, în timp ce la numere Reynolds mici pe cea de-a doua. Vom reveni asupra acestor implicații într-un subcapitol dedicat.

Celelalte două variante, (ρ, η, D) și (ρ, η, V) , implică o singură dependență,

$$F = \frac{\eta^2}{\rho} f(\text{Re}). \quad (9)$$

De regulă, funcția care mediază relația dintre mărimea pentru care se caută o expresie (aici, F) și expresia obținută (η^2/ρ) este un polinom sau o lege de tip putere.

Să vedem ce ne spune relația obținută. Să presupunem cazul particular al unui corp care se mișcă printr-un fluid astfel încât forțele de inerție să fie de același ordin de mărime cu forțele de frecare vâscoasă, practic $\text{Re} \sim 1$,

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2 D^2}{\eta V D} \sim 1 \rightarrow \rho V D \sim \eta. \quad (10)$$

Putem separa mărimile fizice care descriu mișcarea corpului de cele care descriu fluidul prin care acesta se mișcă,

$$V D \sim \frac{\eta}{\rho}. \quad (11)$$

Știind că produsul $\eta V D$ va da o forță [deja avem experiență, dar vezi și relația (8)], putem înmulți relația precedentă cu η pentru a obține

$$\eta V D \rightarrow F \sim \frac{\eta^2}{\rho}. \quad (12)$$

Procedura exemplifică mai mult un mod de a gândi decât o procedură propriu-zisă de identificare a unui grup adimensional. Forța pe care am obținut-o este independentă de caracteristicile corpului (viteză de deplasare și dimensiune). La numere Reynolds unitare, forțele de inerție sunt de același ordin de mărime cu forțele de frecare, iar forța cu care va trebui să acționăm asupra corpului pentru a-l mișca prin acel fluid este **independentă** de caracteristicile corpului, adică are aceeași valoare pentru orice tip de corp!

Din punct de vedere practic, analiza dimensională reduce numărul de experimente necesar pentru a găsi relația de dependență funcțională dintre F și cele patru mărimi fizice identificate (mai degrabă propuse). Fără analiză dimensională vom avea nevoie de câte N experimente pentru fiecare mărime fizică (pe rând, se variază una dintre ele, iar celelalte se mențin constante), în total N^4 experimente. Cu analiză dimensională nu va trebui să variem decât un singur parametru, în acest caz Re , deci N experimente! Mai puține experimente, mai puține costuri, mai mult timp pentru idei!

Despre intuiție

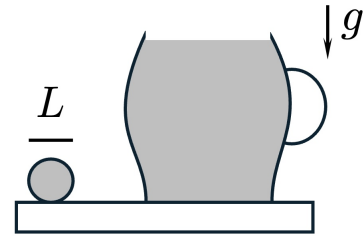
Un exemplu sugestiv este cel pe care l-am întâlnit mai devreme, atunci când căutam o forță în relația

$$VD \sim \frac{\eta}{\rho}. \quad (13)$$

Intuiția (provenită dintr-o experiență anterioară) ne oferă soluția: înmulțind cu η putem obține o forță întrucât produsul ηVD este o forță ($3\pi\eta VD$ este forța de rezistență la înaintare Stokes dacă $Re \ll 1$).

Etapă de identificare a mărimilor fizice relevante este crucială și ține de intuiție atunci când ecuațiile de mișcare nu sunt cunoscute sau pur și simplu sunt prea complicate pentru a fi rezolvate. Mărimile fizice relevante sunt în mod direct legate de forțele dominante (ordin de mărime mai mare față de cele considerate mai puțin relevante).

Spre exemplu, deși gravitația este prezentă indiferent de scara spațială investigată, pentru dimensiuni caracteristice mici, tensiunea superficială poate avea un rol dominant. Plasat pe o suprafață hidrofobă, un lichid fie se poate împrăști sub acțiunea gravitației, fie poate forma picături, a căror formă este impusă de valoarea tensiunii superficiale. Dimensiunea caracteristică a corpului fluid plasat pe suprafață va determina care dintre cele două va avea un efect dominant. Intuiția ne spune că dimensiunea caracteristică L ar trebui să fie mică, dar această descriere nu are sens fără o referință.



Referința se *construiește* prin comparație, identificând cele două mărimi fizice importante. Prima este gravitația, care, pentru un lichid în repaus, intră sub forma unei presiuni hidrostatice, $\rho g L$ – având ca unitate de măsură newton pe metru pătrat (N/m^2). Cea de-a doua este tensiunea superficială, γ – având ca unitate de măsură newton pe metru (N/m). Cele două nu pot fi comparate în această formă, întrucât o relație de tipul

$$\rho g L \sim \gamma \rightarrow [\rho g h] \neq [\gamma] \quad (14)$$

nu este omogenă (unități de măsură diferite). Dar putem *ajusta* unitatea de măsură a membrului drept împărțind γ prin L pentru a obține N/m^2 ,

$$\rho g L \sim \frac{\gamma}{L}. \quad (15)$$

Modificarea nu este lipsită de sens fizic întrucât γ/L este presiunea dată de ecuația Young-Laplace, care descrie saltul de presiune existent la interfața de separare dintre două fluide imiscibile. Vom obține o relație pentru lungimea caracteristică atunci când cele două presiuni au același ordin de mărime,

$$\frac{\rho g L}{\gamma/L} \sim 1 \rightarrow L \sim L_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (16)$$

Lungimea caracteristică obținută este referința pe care o căutam și se numește *lungime capilară*, o referință dependentă de tensiunea superficială, de densitatea fluidului și de accelerația gravitațională. Pentru dimensiuni caracteristice mai mari ca lungimea capilară $\rho g L \gg \gamma/L$, ceea ce implică un efect dominant al gravitației asupra corpului fluid (cum este cazul lichidului aflat în recipientul din imagine care oprește împrăștierea acestuia). Pentru dimensiuni caracteristice mici (acum știm și cât de mici: mult mai mici ca lungimea capilară, $L \ll \sqrt{\gamma/\rho g}$) tensiunea superficială este dominantă și, în acest caz, impune corpului fluid o formă proprie. Pentru apă, la temperatura de 20°C , lungimea capilară este fixată de legile fizicii la valoarea de 2.7 mm ($\gamma = 72 \text{ mN/m}$, $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$). De regulă, sub această scară spațială tensiunea superficială are un rol predominant.

Să încercăm un exercițiu de imaginație plecând de la relația obținută mai devreme pentru lungimea capilară. Ce tensiune superficială ar forma picături de apă având dimensiunea caracteristică de 10 cm ? Folosind relația obținută anterior putem estima

$$\gamma \sim \rho g L_c^2 \approx 98 \text{ N/m}, \quad (17)$$

de aproximativ 1400 de ori mai mare față de valoarea reală! Cum tensiunea superficială este direct proporțională cu energia de coeziune a moleculelor care compun lichidul, $\gamma \propto U$, picăturile având dimensiuni de 10 cm se pot forma doar dacă energia de coeziune crește cu două ordine de mărime! Creșterea lungimii capilare de la L_c la αL_c se poate realiza dacă la nivel molecular energia de coeziune crește de la U la $\alpha^2 U$.

Intuiția se poate construi plecând (și) de la unitățile de măsură. Cele mai importante mărimi fizice sunt exemplificate în continuare.

Mărime fizică	Simbol	Unitate de măsură	Notăție M, L, T
forță	F	$\text{N} - \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	MLT^{-2}
tensiune superficială	γ	$\text{N/m} - \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	MT^{-2}
presiune; efort	$p; \sigma$	$\text{N/m}^2 - \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$
viscozitate	η	$\text{Pa} \cdot \text{s} - \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	$ML^{-1}T^{-1}$
densitate	ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	ML^{-3}
energie	E	$\text{N} \cdot \text{m} - \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	ML^2T^{-2}
putere	P	$\text{N} \cdot \text{m/s} - \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$	ML^2T^{-3}

Unitățile de măsură nu se țin minte, se deduc. În afară de cele fundamentale (șapte la număr) celelalte se pot deduce cunoscând sensul lor fizic. Spre exemplu:

- efort, prin definiție forță (N) distribuită pe o suprafață (m^2) - $[\sigma] = \text{N/m}^2$;
- tensiune superficială via presiune capilară, $\Delta p \sim \gamma/L$ - $[\gamma] = (\text{N/m}^2) \cdot \text{m}$;
- viscozitate via relația constitutivă a fluidelor newtoniene, $\sigma \sim \eta V/L$,
 $[\eta] = (\text{N/m}^2) \cdot \text{s}$;
- energie, $F \times L$ - $[E] = \text{N} \cdot \text{m}$;
- putere, $F \times V$ - $[P] = \text{N} \cdot \text{m/s}$.
- presiune dinamică, ρV^2 , via Bernoulli. Cum $\rho V^2/2 + p + \rho g z = ct$, toți termenii au aceeași unitate de măsură, aici N/m^2 , deci $[\rho V^2] = \text{N/m}^2$.

Tot legat de intuiție (dar și de omogenitate), să luăm ca exemplu următoarea relație

$$h(t) = h_0 e^{-t/\tau}. \quad (18)$$

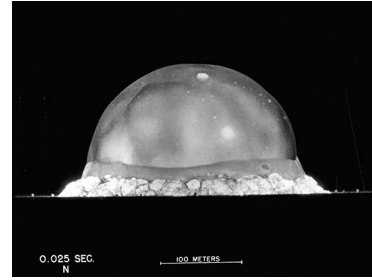
Ce reprezintă τ ? În primul rând, $[\tau] = \text{s}$. De ce? Pentru că raportul t/τ trebuie să fie adimensional. De ce? Să luăm dezvoltarea în serie Taylor a funcției exponențiale

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (19)$$

Aici, $x = -t/\tau$. Dacă x ar avea unitate de măsură, relația obținută anterior nu ar fi omogenă (termeni cu aceeași unitate de măsură). Din acest motiv, $[t/\tau] = [-]$, iar $[\tau] = \text{s}$.

Pentru a determina semnificația fizică, putem înlocui t cu τ pentru a obține $h(\tau)/h_0 = 1/e \approx 36.7\%$, ceea ce arată faptul că τ reprezintă timpul în care h ajunge la 36.7% din valoarea inițială h_0 .

Un exemplu clasic de intuiție prin analiză dimensională este cel legat de explozia nucleară Trinity (Taylor, 1950a). Fără a fi cooptat în programul nuclear Manhattan, G. I. Taylor a fost întrebat dacă poate estima energia eliberată de explozia nucleară, cunoscând doar că aceasta va fi eliberată dintr-un volum mic de material radioactiv printr-un front de undă sferic ce se va extinde în direcție radială.



Taylor a presupus (intuiție căpătată în urma studiilor privind dinamica fluidelor) o relație funcțională de tipul

$$E = f(R, t, \rho), \quad (20)$$

în care E , R , t și ρ sunt energia eliberată de explozie, raza frontului de undă, timpul în care frontul de undă ajunge la raza R și densitatea aerului. Prin analiză dimensională (dar și cu un dram de intuiție) Taylor estimează

$$\frac{Et^2}{\rho R^5} \sim 1 \rightarrow E \sim \frac{\rho R^5}{t^2} \text{ sau } E = C \frac{\rho R^5}{t^2}, \quad (21)$$

unde C este o constantă care pentru aer este aproximativ 1.03. Taylor apreciază (Taylor, 1950b), în funcție de ipoteza simplificatoare impusă, între 16,8 și 23,7 kt TNT echivalente, comparativ cu valoarea (re)estimată oficial în anul 2021 de aproximativ 24,8 kt TNT echivalente (Selby et al., 2021). Ținând cont de scara la care s-a desfășurat explozia nucleară Trinity, rezultatul obținut prin intuiție și analiză dimensională este mai mult decât satisfăcător.

Tot intuitiv putem aproxima frecvența naturală de vibrație ν a unei stele (Longo et al., 2021). Să presupunem un corp astronomic omogen și sferic cu diametrul D având densitatea ρ . Cu siguranță, la asemenea scări spațiale, va trebui să includem și gravitația prin intermediul constantei gravitaționale G din legea atracției universale. Vom impune următoarea relație funcțională

$$\nu = f(D, \rho, G). \quad (22)$$

Prin calcul se obține

$$\frac{\nu}{\sqrt{\rho G}} \sim 1 \rightarrow \nu \sim \sqrt{\rho G}, \quad (23)$$

relație care indică faptul că frecvența de oscilație nu depinde de mărimea stelei!

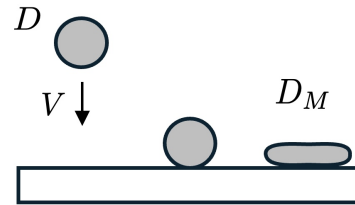
Pentru a determina grupurile adimensionale, întotdeauna ar trebui să plecăm de la ecuațiile de mișcare. Chiar și atunci când nu o facem explicit, de fapt tot pe ecuații ne bazăm raționamentul. Spre exemplu, dacă alegem viscozitatea fluidului printre

mărimile fizice relevante, fără a pleca de la ecuația Navier-Stokes, în realitate ne folosim de faptul că această mărime fizică este deja definită! Viscositatea se introduce printr-o relație constitutivă a fluidului (practic, mediază o relație între cauză și efect), relație care se folosește împreună cu ecuațiile de mișcare pentru a determina, spre exemplu, distribuția de viteză într-un fluid.

Să luăm acum un caz unde intuiția ne poate înșela, cel puțin la început.

Impactul unei picături sferice de diametru D , având viteza V , cu o suprafață hidrofobă va duce la o deformare a picăturii, care se va aplatiza până la un diametru maxim D_M .

Picătura are o densitate ρ și o tensiune superficială γ . Vom considera un fluid ideal și o viteză de impact suficient de mare cât să producă o deformare în urma impactului, dar suficient de mică pentru a-și păstra integritatea postimpact. Putem deduce, prin analiză dimensională, o relație pentru diametrul maxim. Vom considera următoarea relație funcțională



$$D_M = f(\rho, V, D, \gamma). \quad (24)$$

Cinci mărimi fizice, trei fundamentale, două grupuri adimensionale! Le vom forma alegând trei mărimi de bază, spre exemplu ρ, V și D . Vom obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c D_M = \frac{D_M}{D}, \quad (25)$$

întrucât avem două mărimi fizice cu aceeași unitate de măsură, raportul lor fiind grupul adimensional căutat, și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \gamma = \frac{\gamma}{\rho V^2 D} = \frac{1}{We}, \quad (26)$$

unde We reprezintă numărul Weber. Obținem

$$D_M = D f(1/We). \quad (27)$$

Funcția care leagă cele două grupuri adimensionale poate fi obținută prin experiment. Dar o putem estima prin intuiție. Putem presupune faptul că energia cinetică a picăturii, $\rho D^3 V^2$, se transformă în energie de suprafață, γD_M^2 , asociată tensiunii superficiale (impactul mărește suprafața picăturii). În aceste condiții, neglijând

energia de suprafață de la marginea picăturii putem scrie

$$\rho D^3 V^2 \sim \gamma D_M^2, \quad (28)$$

relație care implică

$$D_M \sim D We^{1/2}. \quad (29)$$

Experimente arată însă o variație a diametrului maxim adimensional cu $We^{1/4}$, ceea ce implică faptul că intuiția noastră nu este conformă cu realitatea. Putem totuși rafina acest model (Clanet et al., 2004). Vom considera ecuația de mișcare Euler, în care termenul asociat accelerației locale este echilibrat de gradientul de presiune care va tinde să readucă picătura la formă sferică. Să presupunem că la atingerea diametrului maxim, picătura atinge o înălțime egală cu δ . Din ecuația Euler,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim -\nabla p, \quad (30)$$

putem intui

$$\rho \frac{V}{t} \sim \frac{p_c}{\delta}, \quad (31)$$

unde $p_c = \gamma/\delta$ este presiunea capilară care tinde să readucă picătura la formă sferică, iar $t \sim D/V$. Pentru un fluid incompresibil, conservarea masei implică

$$\rho \frac{\pi D^3}{6} \approx \rho \frac{\pi D_M^2}{4} \delta. \quad (32)$$

Cele două relații obținute anterior implică

$$\frac{\rho V^2}{D} \sim \frac{\gamma}{\delta^2} \rightarrow \frac{D_M}{D} \sim We^{1/4}, \quad (33)$$

practic relația obținută pe cale experimentală.

Se poate obține aceeași relație dacă vom considera o rută puțin atipică. O picătură plasată pe o suprafață plană se va transforma într-o mică *băltoacă* de tip capilar dacă presiunea hidrostatică depășește presiunea capilară de la marginea picăturii. Pentru acest caz, grosimea δ variază proporțional cu lungimea capilară, $l_c = (\gamma/\rho g)^{1/2}$, deoarece

$$\rho g \delta \sim \frac{\gamma}{\delta} \rightarrow \delta^2 \sim l_c^2. \quad (34)$$

Considerând că picătura este supusă unor accelerații mari ca urmare a impac-tului (de la V la 0 într-un timp proporțional cu D/V), putem înlocui accelerația

gravitațională cu V^2/D pentru a obține

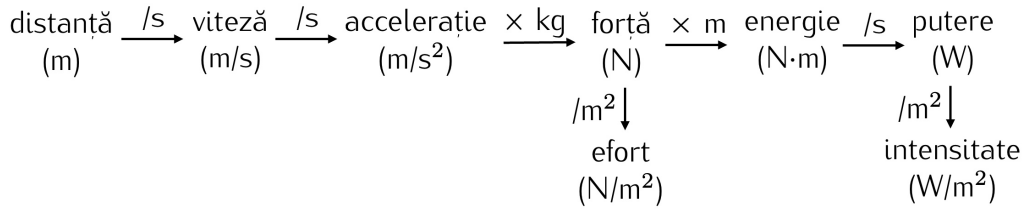
$$\delta^2 \sim \frac{\gamma D}{\rho V^2}. \quad (35)$$

Știind că $\delta D_M^2 \sim D^3$ via conservarea masei, vom obține

$$\frac{D_M}{D} \sim \text{We}^{1/4}. \quad (36)$$

Acest ultim caz este atât un exemplu de intuiție, cât și de analogie cu un fenomen interfacial diferit, dar totuși similar la nivel conceptual.

La final, poate ar trebui să definim printr-o secvență intuitivă cele mai importante mărimi fizice pe care le va întâlni orice tânăr cercetător dornic de a rămâne în memoria colectivă a comunității științifice.



O altă informație utilă tinerilor dornici de a se afirma în știință este și aceasta: comunitatea științifică nu a reușit până acum să explice valorile constantelor fizice universale (mult mai multe la număr decât cele trei pe care le vom discuta în capitolul următor).

Un sistem de măsură impus de Natură

It is possible to set up units for length, mass, time and temperature, which are independent of special bodies or substances, necessarily retaining their meaning for all times and for all civilizations, including extraterrestrial and non-human ones, which can be called "natural" units of measure.

Max Planck

Nu legile fizicii au impus kilogramul, metrul sau secunda ca mărimi caracteristice. Aici ne referim la valorile acestora. Cele trei sunt impuse de experiența speciei umane pe Pământ. Natura nu ar avea de ce să aleagă ca referință temporală partea 1/86 400 dintr-o zi de pe Terra sau ca scară spațială un băț de 1 metru. Natura nu a impus o viteză de deplasare a luminii în vid de 300 000 km/s. Legile fizicii ne spun doar că aceasta este o constantă, valoarea ei fiind o consecință a sistemului de unități de măsură. Schimbi sistemul de măsură, se schimbă și valoarea. Dar dacă am reconsidera viteza luminii într-un alt sistem de unități?

Valorile celor trei mărimi fizice fundamentale (masă, lungime și timp) pot fi regândite plecând de la trei constante universale: $c \approx 300\,000$ km/s, $\hbar \approx 1,054 \times 10^{-34}$ J·s și $G = 6,674 \times 10^{-11}$ N·m²/kg² - viteza luminii, constanta lui Planck redusă și constanta gravitațională. Prin analiză dimensională se ajunge la trei relații care definesc masa, lungimea și timpul Planck:

$$m_P = f(c, \hbar, G) \rightarrow m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,176434(24) \times 10^{-8} \text{ kg}, \quad (37)$$

$$l_P = f(c, \hbar, G) \rightarrow l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616255(18) \times 10^{-35} \text{ m}, \quad (38)$$

respectiv

$$t_P = f(c, \hbar, G) \rightarrow t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,391247(60) \times 10^{-44} \text{ s}. \quad (39)$$

Continuând cu aceeași logică, raportul dintre lungimea și timpul Planck ar reprezenta o viteză Planck, însă nu avem nevoie de o nouă denumire pentru acest raport întrucât $l_P/t_P = c$.

Valorile de referință ale sistemului de unități Planck sunt mai puțin dependente de scara temporală sau spațială a speciei umane, în consecință au un grad redus de antropocentrism. Întrucât suntem liberi să alegem orice valoare de referință, putem alege o renormalizare a celor trei constante la o valoare egală cu unitatea, $c = \hbar = G = 1$. Acest lucru implică o redefinire a kilogramului, a metrului și a secunde. Spre exemplu, în Sistemul Internațional, kilogramul se definește ca masa unui litru de apă. Din punct de vedere practic, această valoare de referință este complet justificată, însă, din punct de vedere fundamental, 1 litru de apă nu reprezintă un etalon sau o referință cu valență universală. Prin renormalizare, kilogramul devine independent de experiența proprie a celui care îl definește. Prin noul *kilogram* vom înțelege $2,176434(24) \times 10^{-8} \text{ kg}$ în SI.

Pentru a clarifica, să redefinim metrul și secunda conform unităților Planck pentru a calcula viteza luminii în acest nou sistem de unități. Vom folosi transformările

$$l_P = 1,616255(18) \times 10^{-35} \text{ m} \rightarrow \text{m} = \frac{l_P}{1,616255(18) \times 10^{-35}} \quad (40)$$

și

$$t_P = 5,391247(60) \times 10^{-44} \text{ s} \rightarrow \text{s} = \frac{t_P}{5,391247(60) \times 10^{-44}}. \quad (41)$$

Vom obține

$$c = 299\,792\,458 \times \frac{5,391247(60) \times 10^{-44} l_P}{1,616255(18) \times 10^{-35} t_P} = 1 \frac{l_P}{t_P}. \quad (42)$$

În mod analog se obțin și celelalte două constante universale.

Sistemul Internațional nu folosește aceste valori de referință, ci se bazează pe șapte mărimi fizice fundamentale, șapte valori de referință extrase din experiența curentă a speciei umane: *metru* (1/10 mil. din distanța de la Ecuator la Polul Nord), *secundă* (1/86 400 dintr-o zi), *kilogram* (masa unui litru de apă), *kelvin* (explicația implică prea multe scări de temperatură și experiențe pentru a-l defini rapid), *amper* (prea complicat), *mol* (cantitate ce conține același număr de particule elementare câte se regăsesc în 12 g de carbon 12) și *candela* (din nou prea complicat).

În dinamica fluidelor, cel mai des întâlnite sunt primele trei și câteodată kelvinul. Le vom folosi în mod repetat pentru a căpăta ... intuiție.

Grupuri adimensionale în mecanica fluidelor

Forțe, eforturi sau acțiuni ca ordin de mărime

Înainte de a folosi analiza dimensională pentru a rezolva o problemă fizică fundamentală sau de ordin practic, poate ar fi indicat să mai căpătăm intuiție. De această dată vom evalua cele mai importante forțe, eforturi sau acțiuni la care sunt supuse fluidele. Vom începe cu ecuația de mișcare a fluidelor incompresibile și newtoniene, ecuația Navier-Stokes. Forma locală (valabilă în fiecare punct al domeniului fluid aflat sub observație) este

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (43)$$

La prima vedere pare complicată. În esență, nu este. Primul lucru pe care ar trebui să îl facem, dacă nu cunoaștem (deloc) ecuația, este să evaluăm unitatea de măsură a fiecărui termen. Cel mai simplu termen de evaluat este ∇p (derivata presiunii în raport cu spațiul), de unde deducem că unitatea de măsură este pascal pe metru. Deci fiecare termen ar reprezenta o forță pe unitatea de volum (de unde și afirmația precedentă prin care am subliniat că ecuația este valabilă local). Dacă înmulțim (fictiv) ecuația cu un volum, în membrul stâng vom obține produsul dintre masă și accelerație, iar în membrul drept o sumă de forțe: de greutate, de presiune și forțe de frecare datorate viscozității fluidului (o formă a legii lui Newton).

Derivatele denotă faptul că viteza și presiunea variază în spațiu și timp. Vom ignora acest aspect evaluând ca ordin de mărime fiecare membru considerând valori de referință pentru cele două (de fapt, patru v_x, v_y, v_z și p) necunoscute, dar și pentru variabilele de care depind acestea, spațiu și timp. Vom impune o viteză caracteristică a curgerii (spre exemplu, viteza medie) V , o presiune caracteristică p_0 , o scară spațială caracteristică L și o scară temporală T . Pentru a obține forțe, vom evalua fiecare membru al ecuației precedente prin înmulțire cu volumul infinitezimal

$d\mathcal{V} = dx dy dz$. Vom obține cinci forțe caracteristice:

- o forță netaționară,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathcal{V} \sim \rho \frac{V}{T} L^3 = F_{ns}, \quad (44)$$

- o forță de inerție,

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} d\mathcal{V} \sim \rho \frac{V^2}{L} L^3 \sim \rho V^2 L^2 = F_i, \quad (45)$$

- o forță de greutate,

$$\rho \mathbf{g} d\mathcal{V} \sim \rho g L^3 = F_g, \quad (46)$$

- o forță de presiune,

$$\nabla p d\mathcal{V} \sim \frac{p_0}{L} L^3 \sim p_0 L^2 = F_p, \quad (47)$$

- și o forță de frecare vâscoasă,

$$\eta \nabla^2 \mathbf{v} d\mathcal{V} \sim \eta \frac{V}{L^2} L^3 \sim \eta V L = F_f. \quad (48)$$

Forțele de inerție și de frecare vâscoasă ne sunt cunoscute, le-am determinat în primul capitol prin analiză dimensională (fără a cunoaște ecuația de mișcare!). Ne vor fi de folos în a determina principalele grupuri adimensionale.

Evaluarea eforturilor tangențiale de natură vâscoasă (ca ordin de mărime) pleacă de la relația constitutivă a fluidelor newtoniene, o relație de directă proporționalitate între efortul tangențial și viteza de deformare specifică (dependentă de gradientul de viteză). Pentru o mișcare de forfecare simplă în direcția axei Ox , efortul tangențial va fi

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{dv_x}{dy} \sim \eta \frac{V}{L}. \quad (49)$$

Un alt tip de efort important este cel care definește saltul de presiune de la interfața de separare a două fluide imiscibile (numit și presiune capilară). În repaus, această diferență de presiune este descrisă de ecuația Young-Laplace,

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (50)$$

în care $R_{1,2}$ sunt cele două raze de curbură ale interfeței. Considerând L ca ordin de mărime caracteristic al celor două raze de curbură (spre exemplu, L poate fi ales ca medie a celor două - vezi curbura medie), ordinul de mărime al presiunii capilare va fi

$$\Delta p \sim \gamma/L. \quad (51)$$

Regula este simplă, se înlocuiesc toate mărimile fizice cu câte un corespondent caracteristic, iar derivatele devin rapoarte. Scările caracteristice, spațiale sau temporale, indică forțele dominante, ceea ce face problema inițială puțin mai simplă. Arta modelării matematice a unui fenomen fizic nu stă neapărat în a include toate forțele care acționează asupra unui domeniu fluid, ci de a intui pe care le putem ignora.

Scări spațiale și temporale caracteristice

Lungimea capilară definită anterior este o astfel de scară; o scară spațială caracteristică, mai exact. Dacă vom compara presiunea hidrostatică (sau forțele masice) cu presiunea capilară (sau forțele de tensiune superficială),

$$\rho g L^3 \sim \gamma L \rightarrow \frac{\rho g L^2}{\gamma} \sim 1 \rightarrow L \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (52)$$

vom găsi o referință care ne indică faptul că, pentru dimensiuni caracteristice mult mai mici comparativ cu lungimea capilară, forțele masice se pot neglija. Pentru a nu complica lucrurile încă de la început, am ignorat faptul că un corp imersat într-un fluid va simți o forță arhimedică proporțională cu volumul de fluid deplasat. Din acest motiv, lungimea capilară l_c se definește considerând forțele masice reduse $\Delta \rho g L^3$ (reduse de forța arhimedică) unde $\Delta \rho$ este diferența de densitate dintre corp (fluid sau nu) și mediul extern fluid,

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta \rho g}}. \quad (53)$$

Modificarea are implicații majore! Să luăm o picătură de apă imersată într-un alt lichid imiscibil. Cum o diferență mică de densitate implică o lungime capilară mai mare, acest fapt implică o extindere a scării spațiale caracteristice fenomenelor interfaciale (în aer aceasta este fixată la 2.7 mm). Pentru o diferență de densitate ce tinde către zero, $\Delta \rho \rightarrow 0$, efectele câmpului gravitațional sunt eliminate, $l_c \rightarrow \infty$, ceea ce implică posibilitatea desfășurării unor experimente pe Terra echivalente (într-o oarecare măsură) celor efectuate în spațiu, departe de influența câmpului gravitațional.

Fenomenele dominate de tensiune superficială ne oferă alte două exemple privind scara caracteristică a unui fenomen fizic, de această dată o scară temporală. Să considerăm un corp fluid aflat sub acțiunea forțelor de tensiune superficială. Să

presupunem că acesta se opune (doar!) prin inerție,

$$F_\gamma \sim F_i \rightarrow \gamma L \sim \rho V^2 L^2. \quad (54)$$

Vom introduce un timp t_R caracteristic regimurilor inerțial-capilare. Vom obține

$$\gamma L \sim \rho \frac{L^4}{t_R^2} \rightarrow t_R = \sqrt{\frac{\rho L^3}{\gamma}}, \quad (55)$$

numit și timp Rayleigh.

Să presupunem acum că fluidul se opune prin frecare vâscoasă, în consecință

$$F_\gamma \sim F_f \rightarrow \gamma L \sim \eta V L \rightarrow \gamma \sim \eta \frac{L}{t_v} \rightarrow t_v = \frac{\eta L}{\gamma}, \quad (56)$$

numit și timp visco-capilar.

Putem construi o scară temporală atipică dacă în relația precedentă înlocuim scara spațială caracteristică L cu lungimea capilară,

$$t = \frac{\eta l_c}{\gamma} \rightarrow t = \frac{\eta}{\sqrt{\rho g \gamma}}. \quad (57)$$

Obținem un timp caracteristic ce conține, pe lângă cele trei proprietăți importante ale fluidelor, și accelerația gravitațională! Această scară temporală este caracteristică fenomenelor pentru care forțele masice, de tensiune superficială și de frecare vâscoasă sunt dominante.

Pentru o curgere pulsatorie a sângelui prin sistemul circulator, scara temporală caracteristică este impusă de frecvența cardiacă. Pentru curgerea unui fluid în jurul unui cilindru, cu desprindere de vârtejuri în siajul cilindrului, scara temporală caracteristică este impusă de frecvența de desprindere a vârtejurilor.

Pentru o conductă circulară aflată sub presiune, prin care curge un lichid, scara spațială caracteristică este diametrul acesteia. Dar dacă secțiunea transversală a conductei nu este circulară? Ce dimensiune caracteristică se poate alege? Pentru astfel de cazuri se definește diametrul hidraulic,

$$D_h = \frac{4A}{P}, \quad (58)$$

unde A și P sunt aria și perimetrul ud al secțiunii transversale. Relația de definiție este concepută astfel încât diametrul hidraulic să coincidă cu diametrul unei conducte cu secțiune circulară.

Pentru o simulare numerică (pe scurt, o rezolvare a ecuațiilor de mișcare înlocuind derivatele cu diferențe finite) alegerea unei discretizări Δx a domeniului fluid (scara spațială caracteristică a simulării) și a unui pas de timp Δt (scara temporală caracteristică a simulării) sunt esențiale. De regulă, se urmărește evoluția unui grup adimensional numit numărul Courant,

$$C = V\Delta t/\Delta x, \quad (59)$$

unde V este o viteză caracteristică a curgerii ce se dorește a fi simulată. Numărul Courant indică măsura în care informația se propagă (V) de-a lungul celulei de discretizare Δx în unitatea de timp Δt . Dacă $C > 1$, informația se propagă prin mai mult de o celulă în timpul Δt , ceea ce poate conduce la rezultate numerice nefizice.

Un alt exemplu de scară temporală frecvent utilizată este

$$T \sim \rho L^2/\eta, \quad (60)$$

care poate fi construită plecând de la o variantă a ecuației de mișcare, anume

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} \sim \frac{\eta}{\rho} \nabla^2(\rho\mathbf{v}), \quad (61)$$

care, în esență, este o ecuație de difuzie a densității de impuls ($m\mathbf{v}$ este impulsul, $\rho\mathbf{v}$ este densitatea de impuls; se împarte impulsul la unitatea de volum). Evaluând ca ordin de mărime fiecare termen, obținem scara temporală caracteristică, un indicator al timpului necesar pentru ca impulsul fluidului aflat în mișcare să difuzeze pe o distanță egală cu L .

Un număr adimensional de ținut minte

Cel mai important grup adimensional întâlnit în studiile privind curgerea fluidelor se construiește raportând forțele de inerție la forțele de frecare vâscoasă. Vom obține numărul Reynolds,

$$\text{Re} = \frac{F_i}{F_f} = \frac{\rho V^2 L^2}{\eta V L} = \frac{\rho V L}{\eta}. \quad (62)$$

Introdus inițial pentru a indica regimul de curgere (laminar sau turbulent), acest număr este cel mai utilizat grup adimensional din mecanica fluidelor. Un caz limită extrem de interesant este cel al viețuitoarelor de dimensiuni mici, deci $\text{Re} \ll 1$, unde eforturile tangențiale de origine vâscoasă ale fluidului prin care acestea se mișcă sunt dominante, iar mișcarea simetrică, de fapt, te ține în loc. Pentru cazul

curgerilor în conducte circulare drepte, valoarea de prag, care delimitează curgerea laminară de cea turbulentă, este $Re \approx 2300$. De menționat faptul că, în condiții de laborator, prin tehnici speciale de laminarizare a curgerii, regimul laminar poate fi extins cu mult peste această valoare de referință.

Lista unor numere adimensionale care se uită

Vom expune această listă plecând de la cele șase tipuri de forțe identificate anterior:

$$F_{ns} = \rho V \nu L^3, F_i = \rho V^2 L^2, F_g = \rho g L^3, F_p = p_0 L^2, F_f = \eta V L \text{ și } F_\gamma = \gamma L, \quad (63)$$

unde scara temporală T este înlocuită cu $\nu = 1/T$. În primul rând va trebui să stabilim dacă tensiunea superficială este importantă pentru fenomenul aflat sub lupă cercetătorului. Vom raporta forțele de greutate la forțele de tensiune superficială pentru a obține numărul Bond (din punct de vedere istoric inițial Eötvös - vezi Georgescu (2004)),

$$Bo = \frac{F_g}{F_\gamma} = \frac{\rho g L^2}{\gamma}. \quad (64)$$

Dacă numărul $Bo \gg 1$, forțele de tensiune superficială pot fi neglijate. Putem obține următoarele grupuri adimensionale în raport cu forțele de inerție:

- numărul Strouhal, folosit pentru a descrie curgeri nepermanente,

$$St = \frac{F_{ns}}{F_i} = \frac{\nu L}{V}, \quad (65)$$

- numărul Froude, folosit pentru a studia curgeri cu suprafață liberă,

$$Fr = \frac{F_i}{F_g} = \frac{V^2}{gL}, \quad (66)$$

- numărul Euler, folosit pentru a studia cavitația sau curgerile compresibile,

$$Eu = \frac{F_p}{F_i} = \frac{p_0}{\rho V^2}, \quad (67)$$

- numărul Reynolds, folosit pentru a descrie regimul de curgere,

$$Re = \frac{F_i}{F_f} = \frac{\rho V L}{\eta}. \quad (68)$$

Interpretarea sau situațiile în care acestea se pot folosi sunt dependente de contextul problemei de ordin fizic. Dacă numărul $Bo \ll 1$, putem neglija forțele masice. Putem obține următoarele grupuri adimensionale în raport cu forțele de tensiune superficială:

- dacă $Re > 1$, vom considera forțele de inerție și vom obține numărul Weber, folosit pentru a descrie tranziția de la picături la jeturi sau impactul picăturilor cu suprafețe solide,

$$We = \frac{F_i}{F_\gamma} = \frac{\rho V^2 L}{\gamma}, \quad (69)$$

- dacă $Re < 1$, vom considera forțele de frecare și vom obține numărul capilarității, folosit pentru a descrie instabilitatea straturilor subțiri vâscoase,

$$Ca = \frac{F_f}{F_\gamma} = \frac{\eta V}{\gamma}, \quad (70)$$

Se observă faptul că $Re = We/Ca$.

Cu excepția numărului Bond, toate celelalte sunt dependente de cinematică. Putem construi un alt grup adimensional, independent de cinematică, dacă vom raporta timpul vâscos-capilar și timpul inerțial-capilar. Vom obține numărul Ohnesorge

$$Oh = \frac{t_v}{t_r} = \frac{\eta L / \gamma}{\sqrt{\rho L^3 / \gamma}} = \frac{\eta}{\sqrt{\rho \gamma L}}. \quad (71)$$

Numărul precedent mai este cunoscut și ca numărul Laplace, dar sub o altă formă,

$$La = \frac{1}{Oh^2} = \frac{\rho \gamma L}{\eta^2} = \frac{\rho(\gamma/\eta)L}{\eta}, \quad (72)$$

care este de fapt un număr Reynolds al capilarității dacă ținem cont de faptul că $[\gamma/\eta] = \text{m/s}$.

Cele nouă grupuri adimensionale sunt cele mai întâlnite numere adimensionale în mecanica fluidelor. Însă, geometria curgerii sau variația proprietăților de material impun o serie de numere adimensionale specifice. Vom enumera o serie de grupuri adimensionale rar întâlnite chiar și de către specialiști.

- Numărul Arhimede, raportul dintre forța de greutate redusă (redușă de forța arhimedică) și forța necesară pentru a deplasa un corp la un număr Reynolds egal cu unitatea,

$$Ar = \frac{(\rho_c - \rho)gL^3}{\eta^2/\rho}, \quad (73)$$

unde ρ_c este densitatea corpului solid imersat.

- Numărul Atwood, raportul dintre diferența și suma densităților asociate curgerilor stratificate instabile,

$$At = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (74)$$

- Numărul Bingham, raportul dintre efortul asociat pragului de curgere σ_0 (sub care un fluid nenewtonian cu prag de curgere nu se *mișcă*) și efortul tangențial de frecare

$$Bm = \frac{\sigma_0}{\eta V/L} = \frac{\sigma_0 L}{\eta V}. \quad (75)$$

- Numărul Dean, care caracterizează curgerea prin conducte curbe

$$Dn = Re \left(\frac{d}{2R} \right)^{1/2}, \quad (76)$$

unde R este raza de curbura a conductei ce cuantifică deviația conductei de la o linie dreaptă.

- Numărul Rossby, raportul dintre forțele de inerție și forțele Coriolis în cazul curgerilor geofizice de la nivel planetar,

$$Ro = \frac{|\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|2\rho\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}|} = \frac{V}{2L\Omega \sin \phi}, \quad (77)$$

unde Ω este viteza unghiulară asociată rotației planetare, iar ϕ este latitudinea. Tot aici, se poate defini un grup adimensional care compară forțele de frecare asociate viscozității cu forțele Coriolis. Se introduce numărul Ekman

$$Ek = \frac{Ro}{Re} = \frac{\eta}{2\rho L^2 \Omega \sin \phi}. \quad (78)$$

- Numărul Morton (un număr foarte complicat, de altfel), folosit pentru a caracteriza forma picăturilor care se deplasează printr-un alt mediu fluid imiscibil

$$Mo = \frac{We^3}{Fr Re^4} = \frac{\Delta\rho g \eta_e^4}{\rho_e^2 \gamma^3}, \quad (79)$$

unde η_e și ρ_e sunt viscozitatea și densitatea fluidului exterior picăturii.

- Numărul Taylor, folosit pentru a caracteriza instabilitatea Taylor-Couette a fluidului care curge ca urmare a deplasării relative a doi cilindri concentrici,

având razele R_1 și R_2 ,

$$\text{Ta} = \frac{\rho^2 \Omega^2 R_1 (R_2 - R_1)^3}{\eta^2}, \quad (80)$$

unde Ω este viteza unghiulară.

- Numărul Trouton, raportul dintre viscozitatea unui fluid într-o mișcare pură uniaxială și viscozitatea definită pentru o mișcare de forfecare simplă,

$$\text{Tr} = \frac{\eta_E}{\eta}. \quad (81)$$

Pentru un fluid newtonian $\text{Tr} = 3$.

Vom afla (și uita) și de alte grupuri adimensionale pe măsură ce parcurgem acest material, grupuri pe care le vom introduce atunci când vom încerca să răspundem la anumite probleme de ordin fizic.

O serie de întrebări cu răspuns prin analiză dimensională

Răspunsuri clasice în mecanica fluidelor

Forțe de rezistență la înaintare

Ce forță de rezistență la înaintare întâmpină un corp cu dimensiunea caracteristică D care se deplasează cu viteză constantă V printr-un mediu fluid?

Intuim o relație funcțională de tipul

$$F_R = f(V, D, \rho, \eta). \quad (82)$$

Putem alege ca mărimi de bază densitatea, viteza și diametrul. Vom obține două grupuri adimensionale, anume

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F_R = \frac{F_R}{\rho V^2 D^2} \quad (83)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \eta = \frac{\eta}{\rho V D}. \quad (84)$$

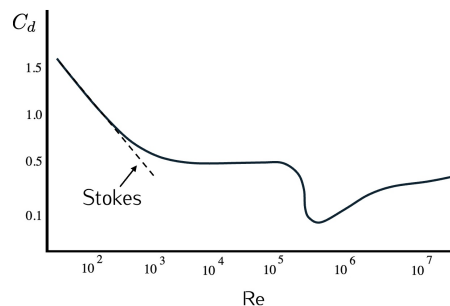
Relația funcțională va fi

$$\frac{F_R}{\rho V^2 D^2} = f(1/\text{Re}). \quad (85)$$

De regulă, relația de calcul al forței de rezistență la înaintare se pune în următoarea formă

$$F_R = C_d \frac{1}{2} \rho V^2 A, \quad (86)$$

în care $C_d = C_d(\text{Re})$ este coeficientul de rezistență la înaintare, iar A este aria proiecției corpului pe un plan perpendicular pe direcția de deplasare.



Coeficientul se determină experimental raportând forța de rezistență la înaintare la $\rho V^2 A/2$. În figura alăturată se prezintă variația acestui coeficient cu numărul Reynolds pentru un obiect sferic.

O soluție alternativă poate fi obținută dacă printre mărimile de bază vom alege viscozitatea în locul densității. Vom obține

$$\Pi_1 = \eta^a V^b D^c F_R = \frac{F_R}{\eta V D} \quad (87)$$

și

$$\Pi_2 = \eta^a V^b D^c \rho = \frac{\rho V D}{\eta}. \quad (88)$$

Relația funcțională va fi

$$F_R = \eta V D f(\text{Re}). \quad (89)$$

Relația obținută este folosită pentru numere $\text{Re} < 1$. Pentru o curgere Stokes, $\text{Re} \ll 1$, ecuația Navier-Stokes poate fi integrată analitic, caz în care $f(\text{Re}) = 3\pi$. Obținem forța de rezistență la înaintare Stokes

$$F_R = 3\pi\eta V D. \quad (90)$$

Pentru o curgere Stokes, egalând cele două expresii ale forței de rezistență la înaintare, obținem

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}}, \quad (91)$$

valabilă doar dacă $\text{Re} \ll 1$.

Pentru numere $\text{Re} < 5$, coeficientul de rezistență la înaintare poate fi determinat folosind relația lui Ossen

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right). \quad (92)$$

Problema se modifică dacă vom considera o picătură de lichid care se deplasează printr-un alt mediu fluid. Dacă cele două fluide sunt imiscibile și prezintă un raport de densitate mare, forța de rezistență la înaintare va depinde și de viscozitatea picăturii η_p ,

$$F_R = f(V, D, \rho, \eta, \eta_p). \quad (93)$$

Relația funcțională include șase mărimi fizice care se reduc la trei mărimi fundamentale. Vom obține trei grupuri adimensionale, anume

$$\frac{F_R}{\rho V^2 D^2} = f(\text{Re}, \beta) \rightarrow F_R = C_d(\text{Re}, \beta) \frac{1}{2} \rho V^2 A, \quad (94)$$

unde $\beta = \eta_p/\eta$ este raportul de viscozitate. În condiții de curgere Stokes

$$C_d = \frac{8}{\text{Re}} \left(\frac{3\beta + 2}{\beta + 1} \right), \quad (95)$$

relație care se reduce la $24/\text{Re}$ pentru un corp solid aflat într-un lichid ($\beta \rightarrow \infty$), ceea ce implică

$$F_R = 3\pi\eta VD. \quad (96)$$

Pentru o bulă de gaz într-un lichid ($\beta \rightarrow 0$) $C_d = 16/\text{Re}$, ceea ce implică

$$F_R = 2\pi\eta VD. \quad (97)$$

Cele două rezultate obținute diferă doar prin coeficientul numeric, dar nu cu mult ($3\pi \approx 9.4$ versus $2\pi \approx 6.2$). Deși cele două corpuri sferice sunt diferite (unul este solid, celălalt gazos), la numere Reynolds mici, dinamica lor este asemănătoare, $F_R \sim \eta VD$, relație care poate fi găsită prin analiză dimensională dacă se intuiește faptul că eforturile de natură vâscoasă domină dinamica asociată curgerii.

Relația Hagen-Poiseuille

Relația Hagen-Poiseuille este una dintre cele mai cunoscute relații din mecanica fluidelor, prin care se poate determina debitul de fluid tranzitat printr-o conductă circulară în condiții de curgere permanentă (fără variații în timp) și regim laminar. Intuim un gradient de presiune constant pe o secțiune de lungime L a unei conducte cu diametrul $2R$. Vom presupune două relații funcționale

$$Q = f\left(\frac{\Delta p}{L}, \rho, R\right) \quad \text{și} \quad Q = f\left(\frac{\Delta p}{L}, \eta, R\right). \quad (98)$$

Fiecare relație conține câte patru mărimi fizice care se reduc la trei mărimi fundamentale, deci vom obține câte un singur grup adimensional pentru fiecare relație. Determinarea grupurilor adimensionale respectă procedura pe care am amintit-o anterior, însă ne putem folosi de intuiție pentru a scăpa de calcul.

Putem pleca de la gradientul de presiune $\Delta p/L$. Știm că prin înmulțire cu R , ne mai rămâne să împărțim la o presiune pentru a forma grupul adimensional. Cum ρV^2 este o presiune, iar $V \sim Q/R^2$, grupul adimensional va fi

$$\Pi = \frac{\Delta p}{L} \frac{R}{\rho(Q/R^2)^2} = \frac{\Delta p R^5}{\rho L Q^2} \sim 1 \rightarrow Q \sim \sqrt{\frac{\Delta p R^5}{\rho L}}. \quad (99)$$

Cea de-a doua variantă se construiește în mod similar, de această dată folosind ordinul de mărime al eforturilor tangențiale de natură vâscoasă, $\eta V/R$. Vom obține

$$\Pi = \frac{\Delta p}{L} \frac{R}{\eta(Q/R^2)/R} = \frac{\Delta p R^4}{\eta Q L} \sim 1 \rightarrow Q \sim \frac{\Delta p R^4}{\eta L}. \quad (100)$$

Care dintre cele două este varianta corectă? Pentru a răspunde la această întrebare va trebui să aducem în discuție și ecuația de mișcare. În condițiile menționate anterior, pentru o curgere în direcția axei Oz , curgerea este descrisă de ecuația

$$\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right). \quad (101)$$

Evaluând ca ordin de mărime fiecare termen, obținem

$$\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{L} \sim \frac{V}{R^2} \rightarrow V \sim \frac{\Delta p R^2}{\eta L} \rightarrow Q \sim \frac{\Delta p R^4}{\eta L}. \quad (102)$$

Soluția exactă,

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \eta L}, \quad (103)$$

se obține prin integrarea ecuației de mișcare.

Pierderi de presiune

Vom încerca să estimăm prin analiză dimensională pierderile de presiune Δp provocate de viscozitatea fluidelor la curgerea acestora printr-o conductă de lungime L și diametru D . Inițial, vom aborda curgerea laminară a unui fluid cu densitate ρ și viscozitate η , astfel încât vom propune următoarea relație funcțională

$$\frac{\Delta p}{L} = f(D, V, \rho, \eta). \quad (104)$$

Alegem ρ, V și D ca mărimi de bază. Vom obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c \frac{\Delta p}{L} \quad (105)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \eta. \quad (106)$$

Vom găsi următoarea relație între grupurile adimensionale

$$\frac{\Delta p}{L} \frac{D}{\rho V^2} = f(\text{Re}). \quad (107)$$

Această funcție de numărul Reynolds reprezintă coeficientul pierderilor liniare de presiune f și joacă un rol central în mecanica fluidelor. Pentru o mișcare laminară

$$f = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} < 2300. \quad (108)$$

Pentru o mișcare turbulentă se cunoaște relația lui Blasius

$$f = 0,316 \text{Re}^{-1/4}, \quad 4000 < \text{Re} < 10^5. \quad (109)$$

Însă, pentru o mișcare turbulentă, relația funcțională trebuie să conțină și rugozitatea medie ϵ a asperităților de la peretele conductei – una dintre cauzele acestei instabilități hidrodinamice. Vom presupune

$$\frac{\Delta p}{L} = f(D, V, \rho, \eta, \epsilon). \quad (110)$$

De această dată relația conține șase mărimi fizice care se reduc la trei mărimi fundamentale. Alegem ρ, V și D ca mărimi de bază, vom găsi cele două grupuri identificate anterior, plus unul format din cele trei de bază și ϵ . Cum ϵ și D au aceeași unitate de măsură, raportul lor va fi grupul adimensional căutat. Vom găsi următoarea relație

$$\frac{\Delta p}{L} \frac{D}{\rho V^2} = f(\text{Re}, \epsilon/D). \quad (111)$$

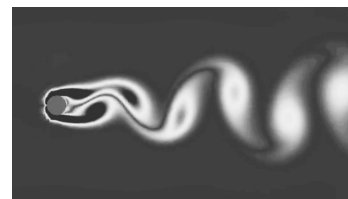
Se cunosc mai multe relații semiempirice pentru calculul acestui coeficient al pierderilor de presiune, printre care formula explicită a lui Haaland,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \lg \left[\frac{6,9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon/D}{3,7} \right)^{1,11} \right]. \quad (112)$$

Până acum, nu se cunosc relații analitice sau empirice în cazul regimului de tranziție, $2300 < \text{Re} < 4000$.

Aleea de vârtejuri Kármán

Curgerea unui fluid în jurul unui obiect poate fi extrem de ofertantă din punct de vedere fenomenologic. Creșterea vitezei cu care fluidul lovește corpul duce la o multitudine de regimuri de curgere. Ne vom opri asupra celui mai spectaculos, numit aleea de vârtejuri Kármán. În anumite condiții (vom vedea imediat care sunt acestea), zonele cu vorticitate concentrată, care se formează în vecinătatea



corpului, se vor desprinde și vor migra purtate de curentul de fluid. Desprinderea vârtejurilor este periodică și crește odată cu creșterea vitezei. Cu ce frecvență ν se desprind aceste vârtejuri? Putem intui o relație funcțională de tipul

$$\nu = f(\rho, V, D, \eta). \quad (113)$$

Alegem ρ, V și D ca mărimi de bază, de unde vom obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c \nu \quad (114)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \eta, \quad (115)$$

ceea ce implică

$$\frac{\nu D}{V} = f(\text{Re}) \rightarrow \text{St} = f(\text{Re}). \quad (116)$$

Identificăm două grupuri adimensionale cunoscute, numărul Strouhal și numărul Reynolds. Semiempiric, se obține următoarea relație

$$\text{St} = 0,21 \left(1 - \frac{20}{\text{Re}}\right), \quad 50 < \text{Re} < 10^5. \quad (117)$$

Desprinderea apare pentru valori ale numărului Reynolds mai mari ca 50. Pentru numere Reynolds mari, se poate folosi următoarea aproximare,

$$\text{St} \approx 0,21 \rightarrow \nu \approx 0,21 \frac{V}{D}. \quad (118)$$

Cascada energetică turbulentă

Probabil cel mai răsunător succes al analizei dimensionale se poate găsi în turbulență. Conceptul de cascadă energetică turbulentă (transfer de energie de la o scară spațială la alta) se bazează pe ideea de a trata turbulența ca o multitudine de vârtejuri având un spectru de dimensiuni caracteristice. Unui vârtej de dimensiune L i se poate asocia o viteză caracteristică $V(L)$ și o scară temporală caracteristică $t(L)$. Vârtejurile mari pot fi instabile, transformându-se în vârtejuri mai mici transferând energia cinetică pe care o conțin. Scara la care apare disiparea prin viscozitate a acestei energii este mult mai mică decât scara integrală (cea mai mare scară asociată curgerii) și se poate determina prin analiză dimensională.

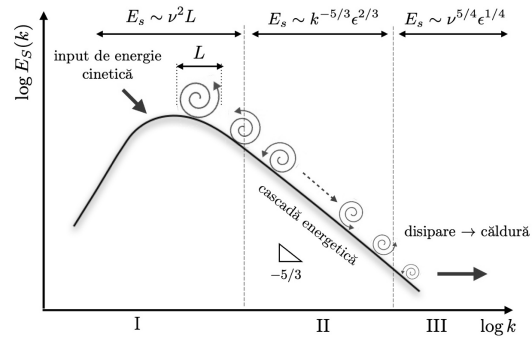
În acest sens, ipoteza lui Kolmogorov (obținută prin intuiție!) este următoarea: într-o curgere turbulentă, pentru numere Reynolds suficient de mari, statistica asociată curgerilor la scări spațiale mici capătă o formă universal valabilă și este în

totalitate dependentă de viscozitatea cinematică ($\nu = \eta/\rho$) și de rata de disipare a energiei turbulente specifice ε . Se pot defini trei scări asociate acestui proces turbulent puternic disipativ: o scară spațială l_η , o scară temporală t_η și o scară a vitezei V_η , toate trei funcții de ν și ε . Cum rata de disipare a energiei turbulente specifice ε se măsoară în J/(kg·s) – energie pierdută de fiecare kilogram la fiecare secundă – prin analiză dimensională vom găsi

$$l_\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad t_\eta \sim \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad V_\eta \sim (\nu\varepsilon)^{1/4}. \quad (119)$$

De observat faptul că numărul Reynolds, calculat cu aceste valori caracteristice pentru regimul disipativ, este întotdeauna egal cu unitatea, $Re = V_\eta L_\eta / \nu = 1$, ceea ce arată că transferul de energie (efectul de cascadă energetică) se desfășoară către scări spațiale din ce în ce mai mici, unde disiparea prin viscozitate domină procesul fizic.

Transferul de la scări spațiale mari către scara Kolmogorov la care are loc disiparea prin viscozitate a energiei turbulente, respectă o lege universală, în care energia spectrală E_S (energie pe unitatea de kilogram asociată unui vârtej de dimensiunea caracteristică L – J/(kg·m⁻¹) – sau cu un număr de undă asociat de ordin $k \sim 1/L$) este o funcție exclusiv de rata de disipare a energiei turbulente specifice ε și de numărul de undă



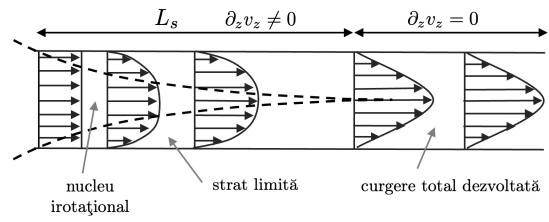
$$E_S = f(\varepsilon, k) \rightarrow E_S \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (120)$$

Aceasta este legea universală a turbulenței, numită și legea "-5/3", obținută în principal prin intuiție și analiză dimensională.

Lungime de stabilizare a curgerii

Să considerăm o conductă în care injectăm brusc un fluid cu densitate ρ și viscozitate η . Treptat, distribuția (cvasi)uniformă de la intrare se va relaxa către o distribuție parabolică dacă regimul de curgere este laminar. Nucleul irotational se va micșora pe măsură ce stratul limită de la peretele conductei se mărește, o consecință a difuziei efectelor induse de viscozitate.

Distanța pe care fluidul o parcurge până la stabilirea unui regim a cărei distribuție de viteză nu mai variază în lungul curgerii (curgere total dezvoltată) se numește lungime de stabilizare, L_s . Lungimea de stabilizare va depinde de diametrul conductei, D , de proprietățile de material și de viteza cu care fluidul pătrunde în conductă.



Putem presupune o relație de tipul

$$L_s = f(\rho, V, D, \eta). \quad (121)$$

Putem alege ρ, V și D ca mărimi de bază pentru a obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c L_s \quad (122)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \eta. \quad (123)$$

Vom obține o relație de tipul

$$\frac{L_s}{D} = f(\text{Re}). \quad (124)$$

Prin experimente se poate identifica dependența dintre cele două numere adimensionale. Pentru o curgere laminară

$$\frac{L_s}{D} \approx 0.06 \text{Re}, \quad \text{Re} < 2300, \quad (125)$$

iar pentru o curgere turbulentă

$$\frac{L_s}{D} \approx 4.4 \text{Re}^{1/6}, \quad \text{Re} > 4000. \quad (126)$$

Cea mai mare lungime de stabilizare este de $138 D$ și se atinge pentru $\text{Re} = 2300$.

Curgeri incompresibile ale fluidelor compresibile

Condiția de curgere incompresibilă diferă într-un mod subtil de condiția de fluid incompresibil. Dacă vom considera o curgere permanentă unidirecțională în lungul

axei Ox, a unui fluid ideal, ecuația de continuitate va avea următoarea formă

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \rightarrow v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (127)$$

Curgerea unui fluid compresibil poate fi considerată incompresibilă dacă

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \ll \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (128)$$

Putem estima derivatele prin diferențe finite în densitate și viteză. Vom obține

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \ll \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \rightarrow v_x \frac{\delta \rho}{\delta x} \ll \rho \frac{\delta v_x}{\delta x} \rightarrow \frac{\delta \rho}{\rho} \ll \frac{\delta v_x}{v_x}. \quad (129)$$

Din ecuația lui Bernoulli putem estima δp ,

$$p_2 - p_1 + \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 0 \quad (130)$$

unde $p_2 = p_1 + \delta p$, $V_2 = V_1 - \delta v_x$, $V_1 = v_x$ (o creștere de presiune duce la o scădere a vitezei). Știind că $(\delta v_x)^2 \approx 0$, vom obține

$$\delta p - \rho v_x \delta v_x = 0 \rightarrow \delta p \approx \rho v_x \delta v_x. \quad (131)$$

Putem introduce viteza sunetului,

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \approx \sqrt{\frac{\delta p}{\delta \rho}}. \quad (132)$$

prin intermediul căreia vom găsi condiția de curgere incompresibilă,

$$\frac{v_x^2}{c^2} \ll 1 \rightarrow \text{Ma}^2 \ll 1, \quad (133)$$

unde Ma definește numărul Mach, raportul dintre viteza de curgere și viteza sunetului prin acel fluid. Din practică, $\text{Ma} < 0.3$ satisface condiția de curgere incompresibilă.

Numere adimensionale în reologie

Unele materiale fluide curg mai greu. Unele par să nu curgă deloc, la prima vedere putând fi catalogate drept solide. Dar dacă *lupa* cercetătorului rămâne suficient de mult timp fixată asupra materialului, va arăta că într-adevăr materialul curge. Din nou avem nevoie de o referință întrucât *mult* sau *puțin* nu spune nimic despre

proces sau material. În acest sens, se definește numărul Deborah,

$$De = \frac{\tau}{t_o}, \quad (134)$$

raportul dintre timpul de relaxare al materialului (o caracteristică a elasticității acestuia, elasticitate care arată capacitatea de a înmagazina și de a elibera energie mecanică) și timpul de observație alocat procesului. Spre exemplu, în reologie, numărul De este raportul dintre timpul de relaxare al materialului și timpul caracteristic al procesului de deformare.

Se disting două cazuri limită: $De \ll 1$ cazul unui fluid, respectiv $De \gg 1$ cazul unui solid. Pentru o entitate atemporală, cu un timp de observație infinit, toate fenomenele fizice au un caracter fluid! Acum putem spune că avem și o perspectivă relativ filozofică a ceea ce ar putea reprezenta un fluid.

Un alt grup adimensional relevant este numărul Weissenberg, raportul dintre eforturile elastice și cele de natură vâscoasă,

$$Wi = \frac{\tau V}{L}. \quad (135)$$

Fenomenele ce se desfășoară la scări spațiale mai mari ca lungimea capilară (deci $Bo > 1$), care implică un fluid cu elasticitate, sunt în general descrise de următoarele mărimi fizice

$$(\eta, L, V, \rho, \tau). \quad (136)$$

Putem alege ρ, V și L ca mărimi de bază pentru a obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b L^c \tau \quad (137)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b L^c \eta, \quad (138)$$

ceea ce implică

$$(\eta, L, V, \rho, \tau) \rightarrow Wi = \frac{\tau V}{L} \text{ și } Re = \frac{\rho V L}{\eta}. \quad (139)$$

Raportul celor două definește numărul elasticității, v. McKinley (2005),

$$El = \frac{Wi}{Re} = \frac{\tau \eta}{\rho L^2}. \quad (140)$$

Pentru un fluid nenewtonian, η reprezintă viscozitatea primului platou newtonian.

Fenomenele ce se desfășoară la scări spațiale mai mici ca lungimea capilară ($Bo < 1$), care includ fluide cu comportament reologic complex, implică și tensiu-

nea superficială ca mărime fizică importantă în dinamica curgerilor (spre exemplu, subțierea filamentelor vâscoelastice). În cazul fluidelor cu elasticitate pentru care eforturile de natură vâscoasă domină în detrimentul inerției, problema se reduce la următoarele mărimi fizice relevante

$$(\eta, L, V, \gamma, \tau). \quad (141)$$

Putem alege η , V și L ca mărimi de bază pentru a obține

$$\Pi_1 = \eta^a V^b L^c \tau \quad (142)$$

și

$$\Pi_2 = \eta^a V^b L^c \gamma. \quad (143)$$

ceea ce implică

$$(\eta, L, V, \gamma, \tau) \rightarrow Wi = \frac{\tau V}{L} \text{ și } Ca = \frac{\eta V}{\gamma}. \quad (144)$$

Raportul celor două definește numărul elastocapilarității

$$Ec = \frac{Wi}{Ca} = \frac{\tau \gamma}{\eta L}. \quad (145)$$

În cazul fluidelor cu elasticitate pentru care inerția domină în detrimentul eforturilor de natură vâscoasă, problema se reduce la următoarele mărimi fizice

$$(\rho, L, V, \gamma, \tau). \quad (146)$$

Putem alege ρ , V și L ca mărimi de bază pentru a obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b L^c \tau \quad (147)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b L^c \gamma, \quad (148)$$

ceea ce implică

$$(\rho, L, V, \gamma, \tau) \rightarrow Wi = \frac{\tau V}{L} \text{ și } We = \frac{\rho V^2 L}{\gamma}. \quad (149)$$

Problema poate fi reformulată prin intermediul raportului celor două grupuri adimensionale identificate anterior

$$\frac{Wi}{We} = \frac{\tau \gamma}{\rho V L^2} = \frac{\eta}{\rho V L} \cdot \frac{\tau \gamma}{\eta L} = \frac{Ec}{Re}. \quad (150)$$

Convecție, conducție, curgere

Aplicațiile practice ale fenomenelor fizice care includ și transfer termic nu se pot descrie fără numere adimensionale. Vom încerca să le introducem pe cele mai importante.

Să considerăm două ecuații, aparent fără legătură, anume

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2(\rho\mathbf{v}) \text{ și } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T. \quad (151)$$

Prima este o aproximare a ecuației Navier-Stokes (care descrie curgerea unui fluid), cea de-a doua este ecuația transferului termic (ecuația căldurii, în care T este temperatura). Ambele sunt ecuații de difuzie! Ambele au aceeași semnificație fizică la bază întrucât descriu un proces de difuzie. Prima descrie difuzia densității de impuls a fluidului, cea de-a doua difuzia căldurii. Coeficientul care mediază cei doi termeni ai ecuației are ca unitate de măsură m^2/s , atât η/ρ , cât și α (difuzivitatea termică). Raportul celor doi coeficienți, difuzivitatea impulsului (se mai numește și viscozitate cinematică) și difuzivitatea termică definește numărul Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{\eta/\rho}{\alpha} = \frac{\eta/\rho}{k/(c_p\rho)} = \frac{\eta c_p}{k}, \quad (152)$$

unde k este conductivitatea termică, iar c_p este căldura specifică la presiune constantă. Valori mici ale numărului Prandtl indică o dominanță a difuziei termice, efectele termice propagându-se mai rapid comparativ cu cele induse de transferul de impuls.

Dacă se dorește o evaluare a raportului dintre transferul termic total (convecție plus conducție) și cel care se realizează strict prin conducție, se definește numărul Nusselt,

$$\text{Nu} = \frac{h}{k/L} = \frac{hL}{k}, \quad (153)$$

unde h este coeficientul de transfer termic, L este o dimensiune caracteristică, iar k este conductivitatea termică. Un număr $\text{Nu} \sim 1$ indică un transfer termic prin conducție pură.

Numărul Grashof se definește ca fiind raportul dintre forțele masice ale convecției libere și forțele de frecare intrinsec asociate fluidului

$$\text{Gr} = \frac{\rho g L^3 (\beta \Delta T)}{\eta^2 / \rho}, \quad (154)$$

unde $\beta \Delta T$ indică modul în care variază densitatea fluidului ca urmare a diferenței de temperatură la care este supus, $\rho = \rho_0(1 - \beta \Delta T)$.

Se poate evalua aportul convecției libere comparativ cu cel al convecției forțate (forțată de curgere) prin intermediul numărului Richardson,

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}. \quad (155)$$

Dacă $Ri \ll 1$ se poate neglija convecția liberă, iar dacă $Ri \gg 1$ se poate neglija convecția forțată.

Putem raporta scara temporală asociată transferului termic prin difuzie la cea asociată transferului termic prin convecție. Scara temporală asociată difuziei pe o distanță de lungime L este $t_d \sim L^2/\alpha$. Scara temporală asociată convecției se determină știind că forțele masice ale convecției libere sunt de același ordin de mărime cu forțele de frecare Stokes,

$$\Delta\rho g L^3 \sim \eta V L \rightarrow \Delta\rho g L^3 \sim \eta \frac{L}{t_c} L \rightarrow t_c \sim \frac{\eta}{\Delta\rho g L}. \quad (156)$$

Raportul celor doi timpi va defini numărul Rayleigh

$$Ra = \frac{t_d}{t_c} = \frac{\Delta\rho g L^3}{\alpha \eta} = \frac{\rho \beta \Delta T g L^3}{\alpha \eta} = Gr Pr. \quad (157)$$

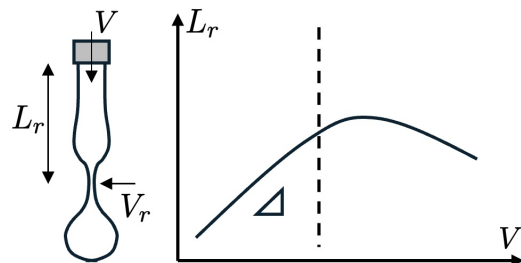
Numărul Rayleigh este o variantă a numărului Péclet, număr pe care îl vom întâlni în curând.

Fenomene interfaciale

Lungimea de rupere a jeturilor lichide

Injectia apei printr-un orificiu cu raza R mai mică decât lungimea capilară va produce un jet lichid care (în anumite condiții) se va rupe în picături. Procesul este natural, distanța față de injector la care are loc ruperea jetului definind lungimea de rupere L_r . Experimentele arată faptul că lungimea de rupere este direct proporțională cu viteza medie V a fluidului injectat. Acest

fapt poate fi explicat dacă vom considera lungimea de rupere ca produs între viteza de injecție a fluidului și timpul necesar unei picături de a se desprinde T_r , care poate fi estimat ca raport între diametrul jetului fluid și viteza de retragere a interfeței în



procesul de desprindere, V_r . Putem scrie

$$L_r \sim VT_r, \quad T_r \sim \frac{D}{V_r}. \quad (158)$$

Pentru un fluid cu vîscozitate sc z t , principalele forțe care se opun procesului de deta are (indus în principal de tensiunea superficială) sunt forțele de inerție. Putem presupune

$$\rho V_r^2 \sim \frac{\gamma}{D}. \quad (159)$$

Vom obține

$$L \sim \frac{V}{V_r} D \rightarrow \frac{L_r}{D} \sim \sqrt{\frac{\rho V^2 D}{\gamma}} \rightarrow \frac{L_r}{D} \sim \sqrt{We}, \quad (160)$$

relație care explică varia ia observată din punct de vedere experimental.

Jeturi lichide se observă atunci când forțele convective ale curgerii dep esc forțele de tensiune superficială. Din acest motiv, condiția de jet lichid liber este

$$\rho V^2 > \frac{\gamma}{D} \rightarrow We > 1, \quad (161)$$

 n caz contrar, picăturile se desprind de injector fără a dezvolta un jet lichid.  in nd cont de regimul de tranzi ie dintre cele două, condiția de jet lichid liber este $We > 4$. Relația obținută anterior explică lungimea de rupere a jeturilor lichide pentru care interac iunea dintre jet  i mediul ambiant este neglijabilă.

Pentru jeturi imersate într-un alt lichid imiscibil, relația funcțională poate conține următoarele mărimi fizice (unde indicele i, e semnifică fluid interior/exterior)

$$L_r = f(\rho_i, \rho_e, \eta_i, \eta_e, \gamma, V, D), \quad (162)$$

prin intermediul cărora putem obține cinci grupuri adimensionale:

$$\Pi_1 = \rho_i^a V^b D^c L_r = \frac{L_r}{D}, \quad (163)$$

$$\Pi_2 = \rho_i^a V^b D^c \eta_i = \frac{\rho_i V D}{\eta_i} = Re_i, \quad (164)$$

$$\Pi_3 = \rho_i^a V^b D^c \eta_e = \frac{\rho_i V D}{\eta_e} = \frac{\rho_i V D \eta_i}{\eta_i \eta_e} = Re_i \beta, \quad (165)$$

unde $\beta = \eta_i / \eta_e$ este raportul de vîscozitate,

$$\Pi_4 = \rho_i^a V^b D^c \gamma = \frac{\rho_i V^2 D}{\gamma} = We_i, \quad (166)$$

$$\Pi_5 = \rho_i^a V^b D^c \rho_e = \frac{\rho_i}{\rho_e} = \zeta, \quad (167)$$

unde $\zeta = \rho_i/\rho_e$ este raportul de densitate. Rezultă

$$\frac{L_r}{D} = f(\text{Re}_i, \text{We}_i, \zeta, \beta), \quad (168)$$

în care indicele semnifică fluidul interior, respectiv exterior jetului.

Relații de dispersie și unde dominante

O fibră fluidă cilindrică cu diametrul D_0 se va transforma treptat într-o serie de picături care vor reduce aria suprafeței de contact al interfeței de separare dintre aer și lichid. Instabilitatea este de origine capilară și se numește instabilitate Rayleigh-Plateau.

Putem presupune că lungimea de undă dominantă care se dezvoltă în mod natural la interfață depinde de diametrul inițial al fibrei fluide și de cele trei proprietăți de material, densitate, viscozitate și tensiune superficială.

Relația funcțională va fi

$$\lambda = f(D_0, \rho, \eta, \gamma), \quad (169)$$

ceea ce implică două grupuri adimensionale

$$\Pi_1 = \rho^a \gamma^b D_0^c \lambda \quad (170)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a \gamma^b D_0^c \eta. \quad (171)$$

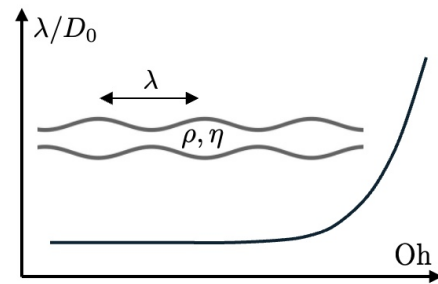
Vom obține o dependență de numărul Ohnesorge Oh ,

$$\lambda = f(D_0, \rho, \eta, \gamma) \rightarrow \frac{\lambda}{D_0} = f\left(\frac{\eta}{\sqrt{\rho D_0 \gamma}}\right) \rightarrow \frac{\lambda}{D_0} = f(\text{Oh}). \quad (172)$$

Plecând de la ecuațiile de mișcare se găsește o relație similară

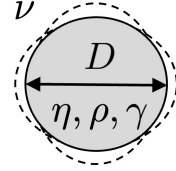
$$\frac{\lambda}{\pi D_0} = \sqrt{2 + 3\sqrt{2} \text{Oh}}. \quad (173)$$

Pentru fluide cu viscozitate redusă, $\text{Oh} \rightarrow 0$, lungimea de undă dominantă este de aproximativ 1.4 ori mai mare decât circumferința fibrei fluide instabile, $\lambda \approx \sqrt{2}\pi D_0$.



Frecvențe naturale de vibrație a picăturilor

Uneori este util să ne gândim la picături ca la mici obiecte care vibrează ca urmare a unor perturbații mecanice induse din exterior. Picăturile se vor deforma alungindu-se cu periodicitate la poli, respectiv în planul ecuatorial. Tensiunea superficială va tinde să readucă picătura la o formă sferică.



Pentru fluide slab vâscoase, inerția domină ca forță ce se opune tensiunii superficiale. În acest caz, frecvența de vibrație naturală a unei picături va depinde de densitate, tensiune superficială și diametru,

$$\nu = f(\rho, \gamma, D). \quad (174)$$

Va rezulta un singur grup adimensional

$$\Pi = \rho^a \gamma^b D^c \nu = \frac{\nu \sqrt{\rho D^3}}{\sqrt{\gamma}}, \quad (175)$$

de care ne putem folosi pentru a determina o relație pentru ν ,

$$\Pi = \frac{\nu \sqrt{\rho D^3}}{\sqrt{\gamma}} \sim 1 \rightarrow \nu \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho D^3}}, \quad (176)$$

unde recunoaștem inversul timpului inerțial-capilar, $\nu \sim 1/t_R$.

Pentru fluide cu viscozitate ridicată, eforturile de natură vâscoasă sunt cele care se opun tensiunii superficiale. În acest caz, frecvența de vibrație naturală a unei picături va depinde de viscozitate, tensiune superficială și diametru,

$$\nu = f(\eta, \gamma, D). \quad (177)$$

Va rezulta un grup adimensional

$$\Pi = \eta^a \gamma^b D^c \nu = \frac{\nu \eta D}{\gamma}, \quad (178)$$

care va da o relație pentru ν ,

$$\Pi = \frac{\nu \eta D}{\gamma} \sim 1 \rightarrow \nu \sim \frac{\gamma}{\eta D} \quad (179)$$

unde recunoaștem inversul timpului vâsco-capilar, $\nu \sim 1/t_v$.

Dinamica filamentelor subțiri

O picătură plasată pe un substrat solid se va desprinde prin intermediul unui filament subțire al cărui diametru descrește în timp. Pe măsură ce diametrul filamentului scade, dacă fluidul are și proprietăți elastice, trei regimuri distincte vor descrie dinamica acestuia.

Sub acțiunea presiunii capilare γ/R (R fiind raza filamentului), în momentele inițiale, filamentul se opune prin inerție,

$$\rho V^2 \sim \frac{\gamma}{R} \rightarrow V \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho R}}, \quad (180)$$

relație care definește viteza capilară a regimului inerțial-capilar.

Știind că $V = -dR/dt$, prin separarea variabilelor și integrare, obținem

$$\rho \left(-\frac{dR}{dt} \right)^2 \sim \frac{\gamma}{R} \rightarrow R(t) = \left(R_0^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} t \right)^{2/3}, \quad (181)$$

unde se alege rădăcina negativă pentru a da sens fizic soluției (raza scade în timp!).

Pentru diametre mici ale filamentului, eforturile tangențiale de origine vâscoasă devin dominante, din acest motiv

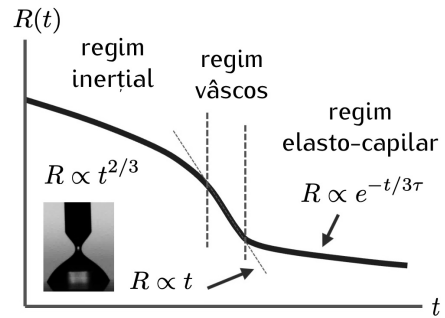
$$\eta \frac{V}{R} \sim \frac{\gamma}{R} \rightarrow V \sim \frac{\gamma}{\eta}, \quad (182)$$

relație care definește viteza capilară a regimului vâscos-capilar. Vom obține

$$-\frac{dR}{dt} \sim \frac{\gamma}{\eta} \rightarrow R(t) = R_0 - \frac{\gamma}{\eta} t. \quad (183)$$

Regimul final este descris de un echilibru între eforturile de natură elastică și presiunea capilară, regimul elasto-capilar fiind dat printr-o variație exponențială de tipul

$$R(t) \propto e^{-t/3\tau}. \quad (184)$$



Impactul picăturilor cu suprafețe perforate

În anumite condiții, picăturile aflate în cădere liberă, la impactul cu o suprafață perforată, pot trece prin orificiu (Lorceau & Quéré, 2003). Presiunea dinamică pe care picătura o exercită asupra orificiului trebuie să fie suficient de mare pentru a învinge presiunea capilară a meniscului ce se formează la contactul cu orificiul și

eforturile de frecare rezultate în urma curgerii fluidului prin orificiu. În consecință,

$$\rho V^2 R^2 \sim \eta V R + \gamma R. \quad (185)$$

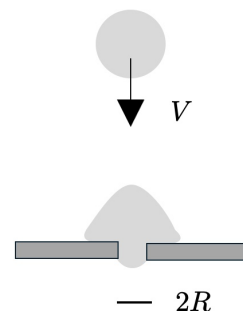
Împărțind prin $\rho V^2 R^2$, putem adimensionaliza relația precedentă pentru a obține

$$1 \sim \frac{\eta}{\rho V R} + \frac{\gamma}{\rho V^2 R} \rightarrow \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{We}} \sim 1 \rightarrow \text{We} \sim \frac{\text{Re}}{\text{Re} - 1}. \quad (186)$$

Granița care demarchează trecerea picăturii prin orificiu va trebui să respecte condiția $\rho V^2 R^2 > \eta V R + \gamma R$, practic

$$\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{We}} < 1 \rightarrow \text{We} > \frac{\text{Re}}{\text{Re} - 1}. \quad (187)$$

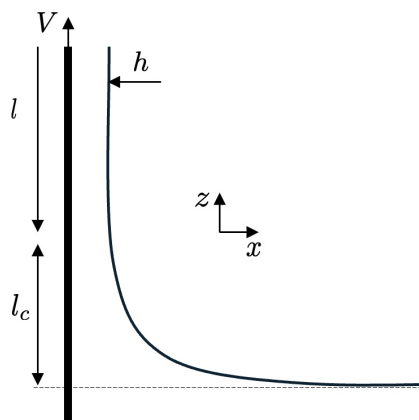
La numere Reynolds mari, care se pot atinge prin viteze mari sau cu fluide mai puțin vâscoase, condiția se reduce la $\text{We} > 1$.



Acoperire cu straturi subțiri prin extragere

Ce grosime va avea stratul fluid depus la peretele unei plăci plane extrasă cu viteza constantă V ? Această problemă clasică a fost rezolvată prin analiză dimensională și este cunoscută drept legea Landau-Levich.

Contactul dintre lichid și solid se realizează prin intermediul unui menisc ce se înalță pe o distanță aproximativ egală cu lungimea capilară l_c . Extragerea plăcii duce la depunerea unui strat subțire de lichid, a cărui grosime h nu se cunoaște. Pentru numere Reynolds mici, eforturile tangențiale de natură vâscoasă vor domina dinamica procesului de depunere. Aceste eforturi tangențiale favorizează depunerea, în contrapondere cu depresiunea capilară (valoare aflată sub presiunea atmosferică datorită curburii!) de la nivelul meniscului care *trage* de lichid în jos. Echilibrul de eforturi va implica



$$\eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \sim \frac{\partial p_c}{\partial z}. \quad (188)$$

Presiunea capilară de la nivelul meniscului este aproximativ egală cu

$$p_c \approx -\gamma \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}. \quad (189)$$

Evaluând ca ordin de mărime relațiile precedente, obținem

$$\eta \frac{V}{h^2} \sim \gamma \frac{h}{l^3} \rightarrow h \sim l \text{Ca}^{1/3}. \quad (190)$$

La granița ce separă zona depunerii de grosime constantă h de meniscul curb generat prin capilaritate, putem estima presiunea capilară știind că presiunea hidrostatică crește (în interiorul fluidului!) până la nivelul suprafeței libere plane, unde atinge presiunea atmosferică. Știind că meniscul se înalță pe o distanță aproximativ egală cu lungimea capilară l_c , putem presupune faptul că

$$-\gamma \frac{h}{l^2} \sim -\rho g l_c \rightarrow l \sim \sqrt{h l_c}. \quad (191)$$

Vom obține

$$h \sim l_c \text{Ca}^{2/3}, \quad (192)$$

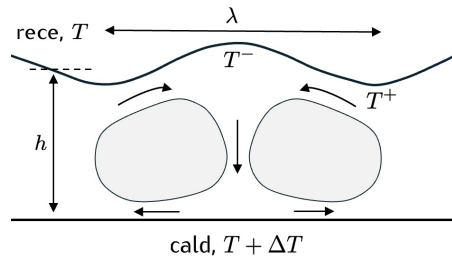
legea Landau-Levich, unde Ca este numărul capilarității.

Curgeri Marangoni

Curgerile Marangoni sunt curgeri induse de un gradient de tensiune superficială. Să luăm ca exemplu instabilitatea unui strat subțire în prezența unui gradient de temperatură. Gradientul de tensiune superficială va determina apariția unor celule hexagonale care vor afecta uniformitatea stratului subțire depus la perete. Pentru a înțelege cum se poate *îmbilânzi* această instabilitate, se definește numărul Marangoni,

$$\mathcal{Ma} = -\frac{\delta\gamma}{\delta T} \frac{h\Delta T}{\eta\kappa}, \quad (193)$$

unde $\delta T \approx T^+ - T^-$, o diferență mică de temperatură (minimele sunt mai apropiate de substratul cald!) care determină o diferență de tensiune superficială $\delta\gamma$, implicit o curgere Marangoni care antrenează lichidul pentru a forma celule convective Bénard; h este grosimea stratului lichid, ΔT este diferența de temperatură dintre substrat și interfață, iar κ este un coeficient care cuantifică difuzivitatea termică a fluidului (Abbott, 2024, Saranjam et al., 2016).



Numărul Marangoni se poate defini și pentru cazul unui gradient de tensiune superficială determinat de un gradient de concentrație (spre exemplu, indus de surfactanți). În acest caz

$$\mathcal{Ma} = -\frac{\delta\gamma}{\delta C} \frac{h\Delta C}{\eta\mathcal{D}}, \quad (194)$$

unde C reprezintă concentrația, iar $\mathcal{D}$ este coeficientul de difuzie. Pentru numere $\mathcal{Ma} > 80$ stratul devine instabil, lungimea de undă dominantă a instabilității fiind

$$\lambda = \frac{2\pi h}{\sqrt{\mathcal{Ma}/8}}. \quad (195)$$

Un exemplu de estimare a pragului critic ce separă regimurile de curgere

Să ne întoarcem la fibra fluidă cilindrică supusă unei curgeri uniaxiale de tip extensional. O picătură pusă în contact cu o suprafață solidă va dezvolta o punte lichidă care se va subția în timp. Presiunea capilară va expulza lichidul dinspre punctul de rază minimă spre exterior, în lungul filamentului de formă cilindrică. În funcție de dimensiunea, viscozitatea și elasticitatea filamentului, se pot observa mai multe regimuri de curgere (prezentate pe scurt și într-o aplicație anterioară). Se pot întâlni trei regimuri (Rodd et al., 2005)

- regim inerțial-capilar (fluidul se opune curgerii predominant prin inerție)

$$R(t) = 0,64 \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/3} (t_i - t)^{2/3}, \quad (196)$$

unde t_i este timpul critic de rupere a filamentului;

- regim vâsco-capilar (fluidul se opune curgerii predominant prin frecare)

$$R(t) = R_0 - \frac{\gamma}{14,1\eta} t; \quad (197)$$

- regim elasto-capilar (fluidul se opune curgerii predominant prin elasticitate)

$$R(t) = R_0 \left(\frac{\mathcal{G}R_0}{2\gamma} \right)^{1/3} e^{-t/3\tau}, \quad (198)$$

unde $\mathcal{G}$ este modulul elastic, iar τ este timpul de relaxare.

Ce viscozitate trebuie să aibă un fluid pentru ca regimul de curgere să fie dominat de inerție? Deși putem folosi timpii introduși anterior (timpul vâscos și timpul Rayleigh, raportul lor fiind numărul Ohnesorge) pentru a estima granița care separă cele două regimuri, relațiile anterioare ne pot oferi o variantă mai bună (Rodd et al., 2005).

Timpii caracteristici se obțin din condiția $R(t) = 0$, de unde vom deduce scara temporală asociată regimului vâscos, $t_v = 14,1 \eta R_0 / \gamma$, și scara temporală asociată regimului inerțial, $t_i = 1,95 (\rho R_0^3 / \gamma)^{1/2}$. Granița se obține raportând aceste două valori,

$$\frac{14,1 \eta R_0 / \gamma}{1,95 (\rho R_0^3 / \gamma)^{1/2}} = 7,23 \text{ Oh.} \quad (199)$$

Pentru a afla viscozitatea fluidului ce implică un regim inerțial se impune condiția

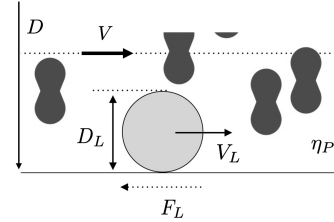
$$t_v < t_i \rightarrow 7,23 \text{ Oh} < 1 \rightarrow \text{Oh} < \frac{1}{7,23} \rightarrow \eta < \frac{\sqrt{\rho R \gamma}}{7,23}. \quad (200)$$

Procese de transport în medii fiziologice

Forțe de rezistență la înaintarea leucocitelor

În venulele postcapilare, viteza de deplasare a leucocitelor este mai mică față de curgerea principală întrucât acestea se deplasează în apropierea peretelui. Dacă peretele prezintă leziuni, viteza lor scade până la zero, iar celulele migrează în țesut (Trusky et al., 2004).

Forța de rezistență la înaintare ia naștere ca urmare a interacțiunii dintre leucocit și celulele endoteliale, respectiv dintre leucocit și plasmă. Această forță depinde de viscozitatea și densitatea plasmei, de viteza leucocitului, de viteza de curgere a plasmei, de diametrul capilarului, de diametrul leucocitului și de hematocrit,



$$F_L = f(\rho, \eta_P, V_L, V, D, D_L, \text{Hct}). \quad (201)$$

Putem alege η_P, V și D ca mărimi de bază. Cum produsul dintre cele trei este o forță, primul grup adimensional este

$$\frac{F_L}{\eta_P V D}. \quad (202)$$

Grupul η_P, V, D și ρ va da numărul Reynolds. Cum celelalte două mărimi fizice rămase, V și D_L , au corespondent echivalent printre mărimile de bază, grupurile adimensionale vor fi

$$\frac{V_L}{V}, \frac{D_L}{D}. \quad (203)$$

Cum hematocritul este o mărime adimensională, vom găsi următoarea relație

$$\frac{F_L}{\eta_P V D} = f\left(\text{Hct}, \text{Re}, \frac{D_L}{D}, \frac{V_L}{V}\right). \quad (204)$$

Debit tranzitat prin porii unei membrane

La nivelul unei membrane poroase, debitul tranzitat va depinde de proprietățile de material ale fluidului, ρ și η , de dimensiunea caracteristică a porilor D și de saltul de presiune existent la interfață, Δp . Vom alege să neglijăm densitatea fluidului întrucât intuim numerele Reynolds mici, $\text{Re} \ll 1$, deci forțele de inerție sunt neglijabile comparativ cu cele de natură vâscoasă. Din acest motiv, putem aprecia

$$Q = f(\eta, D, \Delta p). \quad (205)$$

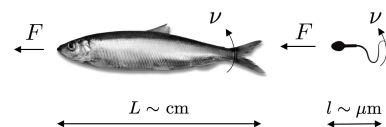
Putem găsi acest grup adimensional fără calcul! Cum relația Hagen-Poiseuille implică o dependență direct proporțională a debitului cu gradientul de presiune și diametrul la puterea a patra ($Q \propto D^4 \Delta p / L$) și invers proporțională cu viscozitatea fluidului, $Q \propto 1/\eta$, singura modificare indusă de absența unei lungimi L va viza relația de proporționalitate în raport cu diametrul porilor, de la $Q \propto D^4$ la $Q \propto D^3$. Vom obține

$$\Pi = \frac{Q\eta}{\Delta p D^3} \sim 1 \rightarrow Q \sim \frac{\Delta p D^3}{\eta}. \quad (206)$$

Spermatozoizi și heringi

Alegerea mărimilor fizice caracteristice depinde (și) de scara spațială caracteristică. Un exemplu relevant în acest sens este deplasarea unui hering printr-un mediu lichid cu densitate ρ și viscozitate η comparativ cu deplasarea unui spermatozoid. Atât heringul cât și spermatozoidul generează o forță de propulsie F prin mișcarea cu periodicitate, de frecvență ν , a înotătoarei codale, respectiv a flagelului.

Scara spațială caracteristică a heringului este de ordinul centimetrilor, respectiv de ordinul micrometrilor pentru spermatozoid. Putem propune următoarea relație funcțională pentru ambele cazuri



$$F = f(L, \nu, \rho, \eta). \quad (207)$$

Vom considera ca mărimi de bază L, ν și ρ . Am mai întâlnit o astfel de relație, cu singura diferență că de data asta mărimea cinematică este frecvența de oscilație, nu viteza. Dacă am putea găsi o viteză, cunoscând deja grupurile adimensionale

($F/\rho V^2 L^2$ și Re), am putea evita calculul. Produsul dintre frecvență și lungime ar putea înlocui viteza (ca unitate de măsură; doar asta căutăm aici!), ceea ce implică

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = f\left(\frac{\eta}{\rho V L}\right) \xrightarrow{V \sim \nu L} \frac{F}{\rho \nu^2 L^4} = f\left(\frac{\eta}{\rho \nu L^2}\right). \quad (208)$$

Dar această relație implică o dominanță a forțelor de inerție, ceea ce din punct de vedere fizic este corect pentru un hering. Pentru spermatozoid putem intui faptul că numărul Reynolds este mult mai mic decât unitatea din cauza dimensiunilor caracteristice de ordinul micronilor,

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta} \xrightarrow{V \sim \nu L} \frac{\rho \nu L^2}{\eta} \xrightarrow{L \sim \mu m} Re \ll 1. \quad (209)$$

În acest caz, vom alege viscozitatea printre mărimile de bază în detrimentul densității pentru a obține

$$\frac{F}{\eta V L} = f\left(\frac{\rho V L}{\eta}\right) \xrightarrow{V \sim \nu L} \frac{F}{\eta \nu L^2} = f\left(\frac{\rho \nu L^2}{\eta}\right). \quad (210)$$

Viscozitatea citoplasmei

Viscozitatea citoplasmei neutrofilelor se poate estima prin introducerea acestora într-o micropipetă. Prin aspirare se poate induce o depresiune în micropipetă, fapt ce va determina celula să ... *curgă*. Experimental, se observă faptul că neutrofilele ating relativ rapid o viteză constantă de deplasare. Într-o astfel de mișcare, neutrofilele se comportă ca un fluid newtonian, ceea ce permite determinarea unei viscozități echivalente a citoplasmei.

Vom presupune că viscozitatea citoplasmei depinde de raza micropipetei, R_p , de raza neutrofilei ce urmează a fi aspirată, R , de viteza de avans, V , și de diferența de presiune în exces (peste cea necesară pentru a iniția procesul de aspirare) care determină mișcarea celulei, Δp ,

$$\eta = f(R_p, R, V, \Delta p). \quad (211)$$

Dacă alegem V , R_p și Δp ca mărimi de bază, vom obține două grupuri adimensionale

$$\Pi_1 = V^a R_p^b \Delta p^c \eta \quad (212)$$

și

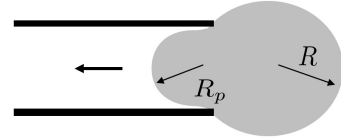
$$\Pi_2 = V^a R_p^b \Delta p^c R. \quad (213)$$

Prin calcul (sau prin intuiție!) vom găsi

$$\frac{\eta V}{R_p \Delta p} = f\left(\frac{R}{R_p}\right). \quad (214)$$

Relația dintre cele două grupuri adimensionale se poate obține (și) prin integrare (și aproximare) a ecuațiilor de mișcare (Wang et al., 2019),

$$\frac{\eta V}{R_p \Delta p} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{R}{R_p}\right)^{-1} \rightarrow \eta = \frac{R_p \Delta p}{6V(1 - R/R_p)}.$$



Presiunea necesară pentru ejaculare

La ejaculare, sperma atinge o viteză aproximativ egală cu 12 m/s! Valoarea ridică următoarea întrebare: ce presiune dezvoltă organismul pentru a determina sperma să se deplaseze cu o astfel de viteză?

În medie, uretra are 8 mm în diametru, iar sperma are o densitate de aproximativ 1020 kg/m³ și o viscozitate de 5 mPa·s. Relația funcțională va include

$$p_e = f(V, D, \rho, \eta). \quad (215)$$

Vom obține

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c p_e \quad (216)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a V^b D^c \eta. \quad (217)$$

Relația funcțională va fi

$$\frac{p_e}{\rho V^2} = f(\text{Re}) \quad (218)$$

sau

$$\frac{p_e}{\eta V/D} = f(\text{Re}), \quad (219)$$

dacă de această dată vom alege viscozitatea printre mărimile de bază în detrimentul densității. Prin calcul, în primul caz obținem $\Pi_2 = 1/\text{Re}$, dar acest lucru este mai puțin important deoarece dependența se păstrează, iar funcția necunoscută f va include această modificare.

Pentru a determina funcția necunoscută (f) am avea nevoie de experimente realizate pe mai mulți subiecți, pentru fluide cu proprietăți diferite. În medie, ne așteptăm ca valoarea acestei presiuni să nu varieze considerabil (cu mai multe ordine de mărime). Din acest motiv, putem neglija dependența de numărul Reynolds,

ceea ce ne va ajuta să alegem varianta fizic acceptabilă privind relația de calcul (întrucât avem două!) a presiunii. Putem calcula numărul Reynolds, caz în care vom găsi $Re = 19\,200$, o valoare care indică o dominanță a forțelor de inerție în detrimentul celor de frecare. În consecință, vom alege prima relație de calcul pentru a estima presiunea p_e . Vom găsi

$$p_e \sim \rho V^2 \rightarrow p_e \approx 144\,000 \text{ Pa.} \quad (220)$$

Valoarea experimentală este de aproximativ $50\,000 \text{ Pa}$, de trei ori mai mică față de valoarea determinată anterior. Dacă ne amintim că $\rho V^2/2$ este presiunea dinamică obținută via ecuația Bernoulli, vom adapta această relație pentru a obține

$$p_e \sim \frac{\rho V^2}{2} \approx 72\,000 \text{ Pa,} \quad (221)$$

o valoare care estimează corect (ca ordin de mărime!) presiunea generată de organism pentru a ejacula sperma cu o viteză de aproximativ 12 m/s .

Dacă am fi folosit cea de-a doua relație, $p_e \sim \eta V/D$, am fi obținut $p_e \approx 7,5 \text{ Pa}$, o estimare extrem de nerealistă având în vedere valoarea dezvoltată de organism, $50\,000 \text{ Pa}$.

Cea de-a treia variantă, ρ, η, D , implică

$$\frac{p_e}{\eta^2/(\rho D^2)} = f(Re) \rightarrow p_e \sim \frac{\eta^2}{\rho D^2} \rightarrow p_e \approx 0,38 \text{ mPa,} \quad (222)$$

o valoare inacceptabilă din punct de vedere fizic prin ordin de mărime, dar care nici nu surprinde legătura fizică dintre presiunea dezvoltată de organism și viteza de ejaculare a spermei.

Viteze de sedimentare

Aplicația este utilă pentru înțelegerea vitezei de sedimentare a hematiilor (testul VSH) sau a tehnicilor de ultracentrifugare.

Vom încerca să estimăm timpul necesar unei particule sferice de a atinge viteză constantă atunci când aceasta se deplasează printr-un lichid cu densitate ρ și vîscozitate η . Particula sferică de diametru D pleacă din repaus și atinge o viteză constantă ca urmare a echilibrului dintre forțele masice și cele de frecare vîscoasă. În consecință, putem intui

$$F_g - F_a - F_f = m\dot{V}, \quad (223)$$

unde F_a este forța arhimedică, iar m este masa particulei. Vom presupune valabilă

relația lui Stokes pentru forța de rezistență la înaintare, deși relația este valabilă în cazul unei mișcări permanente. Știind că $F_g = \rho_p g \pi D^3/6$, $F_a = \rho g \pi D^3/6$ și $F_f \approx 3\pi\eta V D$, vom obține o ecuație diferențială de gradul întâi având ca necunoscută viteza,

$$\frac{dV}{dt} + \frac{3\pi\eta D}{m} V - \frac{\Delta\rho g \pi D^3}{6m} = 0 \rightarrow \dot{V} + \frac{18\eta}{\rho D^2} V - \frac{\Delta\rho}{\rho} g = 0, \quad (224)$$

$\Delta\rho = \rho_p - \rho$ fiind diferența dintre densitatea particulei solide și cea a lichidului.

Vom adimensionaliza această ecuație identificând o viteză caracteristică și o scară temporală asociată fenomenului. Viteza caracteristică se poate obține din ecuația de echilibru dintre forțele masice și forțele de rezistență la înaintare (atunci când particula atinge viteză constantă)

$$\Delta\rho g \frac{\pi D^3}{6} = 3\pi\eta V_0 D \rightarrow V_0 = \frac{\Delta\rho g D^2}{18\eta}. \quad (225)$$

Întrucât ecuația diferențială (224) este dimensional omogenă (toți termenii au aceeași unitate de măsură), fiecare termen fiind practic o accelerație, grupul cu care se înmulțește cel de-al doilea termen are ca unitate de măsură s^{-1} . Putem alege

$$T_0 = \frac{\rho D^2}{18\eta} \quad (226)$$

ca scară temporală caracteristică. Pentru a obține varianta adimensională, vom înlocui V cu $V_0 \hat{V}$ și t cu $T_0 \hat{t}$, produsul dintre mărimea fizică reprezentativă și varianta adimensională a acesteia. În aceste condiții, vom obține

$$\frac{V_0}{T_0} \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} + \frac{18\eta}{\rho D^2} V_0 \hat{V} - \frac{\Delta\rho}{\rho} g = 0 \rightarrow \frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} + \hat{V} - 1 = 0. \quad (227)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale (în variantă adimensională!) se obține în două etape. Se renunță la termenul liber și se rezolvă ecuația omogenă

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} + \hat{V} = 0 \rightarrow \frac{d\hat{V}}{\hat{V}} = -d\hat{t} \rightarrow \hat{V} = C_1 e^{-\hat{t}}. \quad (228)$$

Întrucât termenul liber este o constantă, se presupune o soluție generală de tipul

$$\hat{V} = C_1 e^{-\hat{t}} + C_2. \quad (229)$$

Cele două constante se obțin înlocuind soluția propusă în ecuația diferențială, la care se adaugă condiția inițială (particula pleacă din repaus) $V(0) = 0$, deci

$\hat{V}(0) = 0$. Vom obține $C_1 = -1$ și $C_2 = 1$, care vor da soluția ecuației diferențiale,

$$\hat{V} = 1 - e^{-\hat{t}} \rightarrow V = \frac{\Delta \rho g D^2}{18\eta} \left(1 - e^{-\frac{18\eta}{\rho D^2} t}\right).$$

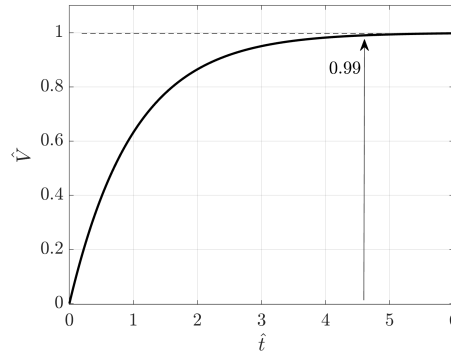
Pentru timpi mari, $t \rightarrow \infty$, $V \rightarrow V_0$, viteza constantă pe care o căutam. În cât timp ajunge particula la această viteză? Cum exponențiala nu va atinge niciodată valoarea zero, astfel încât $V = V_0$, va trebui să impunem un prag.

Vom considera că particula atinge viteză constantă dacă $V(T_c) \approx 99\% V_0$, adică

$$\hat{V}(\hat{T}_c) = 1 - e^{-\hat{T}_c} \rightarrow 0.99 = 1 - e^{-\hat{T}_c},$$

ceea ce implică

$$\hat{T}_c = \ln 100 \rightarrow \hat{T}_c \approx 4.6,$$



deci

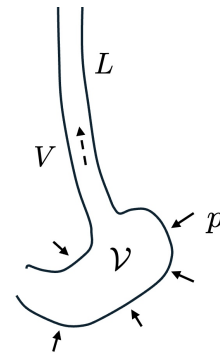
$$T_c \approx 4,6 T_0 \rightarrow T_c \approx 4,6 \frac{\rho D^2}{18\eta}. \quad (230)$$

Particula atinge viteză constantă după aproximativ 5 timpi caracteristici T_0 . Relația arată că particulele mai mici (sau cele care se deplasează în fluide mai vâscoase) vor atinge o viteză constantă într-un timp mai scurt.

Presiunea necesară pentru golirea stomacului - un caz tipic de exces

În cazul unor afecțiuni (sau în cazul unor excese bahice) organismul răspunde prin eliminarea conținutului de natură fluidă prezent în stomac. Dacă viteza de expulzare a vomei poate fi (relativ) ușor măsurată, presiunea dezvoltată de organism este mult mai greu de măsurat. Însă, putem determina un ordin de mărime prin analiză dimensională.

Pentru aceasta (mai mult ca exercițiu) vom considera mai întâi timpul de golire a stomacului. Să presupunem că timpul de golire a lichidului din stomac depinde de volumul acestuia, de diametrul esofagului, de presiunea generată de organism și de densitatea lichidului. Vom neglija viscozitatea acestuia în ipoteza în care lichidul din stomac este asemănător cu apa (cum sunt mai toate băuturile intoxicante ce te



pot aduce în această stare), deci de viscozitate redusă. Presupunem

$$T_g = f(\mathcal{V}, D, p, \rho). \quad (231)$$

Căutăm o relație explicită de calcul între cele cinci mărimi fizice, care vor da două grupuri adimensionale. Am avea nevoie doar de unul. Vom alătura două dintre acestea pentru a reduce problema la patru mărimi fizice, deci un singur grup adimensional. Observăm faptul că raportul $\mathcal{V}/T_g$ reprezintă un debit, în consecință putem scrie

$$Q = f(D, p, \rho). \quad (232)$$

Vom obține

$$\Pi = D^a p^b \rho^c Q, \quad (233)$$

deci

$$\Pi = D^{-2} p^{-1/2} \rho^{1/2} Q = \frac{Q}{D^2} \sqrt{\frac{\rho}{p}} \sim 1 \rightarrow Q \sim D^2 \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad (234)$$

Putem estima presiunea generată de organism știind $Q \sim V D^2$. Vom obține

$$V \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}} \rightarrow p \sim \rho V^2, \quad (235)$$

un rezultat, de acum, foarte cunoscut! Pentru o viteză de expulzare de 13 m/s, obținem $p \approx 169$ kPa. Putem rafina această estimare dacă aplicăm relația lui Bernoulli, pentru un fluid ideal, între stomac și gură. Vom obține

$$\frac{\rho V_s^2}{2} + (p + p_{at}) + \rho g z_s = \frac{\rho V_g^2}{2} + p_{at} + \rho g z_g. \quad (236)$$

Vom considera că lichidul pleacă din repaus $V_s = 0$, $V_g = V$, iar $z_g - z_s = L$, deci $L \approx 30$ cm, ceea ce implică

$$p = \frac{\rho V^2}{2} + \rho g L \rightarrow p \approx 87 \text{ kPa}. \quad (237)$$

Experimentele arată o valoare maximă a acestei presiuni de 40 kPa, o valoare (relativ) apropiată, ca ordin de mărime, de cea obținută anterior.

Timpul de evacuare a materiilor fecale în cele mai urgente situații

... cum este cazul diareei – materii fecale sub formă lichidă! Eliminarea acestora se desfășoară într-un timp mult mai scurt comparativ cu procesul natural, neperturbat. Vom încerca să estimăm acest timp. Putem pleca de la relația lui Newton, $ma = F$.

Presupunem eliminarea unui cilindru lichid de diametru D și lungime L într-un timp T_d , proces indus de presiunea generată în interiorul organismului. Putem scrie

$$\rho D^2 L \ddot{z} \sim p D^2, \quad (238)$$

unde $\ddot{z}$ este accelerația cilindrului fluid. Dacă vom considera $\ddot{z} \sim L/T_d^2$, vom găsi

$$\rho D^2 L \frac{L}{T_d^2} \sim p D^2 \rightarrow T_d \sim L \sqrt{\frac{\rho}{p}}. \quad (239)$$

Prin alometrie se găsesc următoarele relații $p \sim 0.57 M^{0.06}$ și $L \sim 4.2 M^{0.31}$ (Yang et al., 2017), unde M este masa organismului (în acest caz, aflat într-o situație delicată). Pentru un organism cu masa de 70 kg vom găsi $p \approx 0.73$ kPa și $L \approx 16$ cm, ceea ce implică un timp de eliminare a materiilor fecale lichide de aproximativ 0.19 s, un timp apropiat, ca ordin de mărime, cu ceea ce, să recunoaștem, am trăit cu toții!

Conductivitatea hidraulică a unei membrane poroase

Conductivitatea hidraulică a unei membrane poroase (K – volum transportat pe unitatea de arie în unitatea de timp) depinde de porozitatea membranei (ε – volumul porilor raportat la volumul total), de coeficientul de difuzie al speciei care difuzează prin membrană ($\mathcal{D}$), de grosimea membranei (δ), de viteza medie de curgere a fluidului interstițial V , de viscozitatea și densitatea fluidului ce transportă specia care difuzează (Roselli & Diller, 2011).

În aceste condiții, relația funcțională va fi

$$K = f(\varepsilon, \mathcal{D}, \delta, V, \rho, \eta). \quad (240)$$

Relația include șapte mărimi fizice care se reduc la trei mărimi fizice fundamentale. Vom alege trei mărimi fizice de bază, spre exemplu η, ρ și δ . Vom obține patru grupuri adimensionale. Primul este ușor de găsit întrucât o mărime fizică este deja adimensională, anume ε . Deci

$$\Pi_2 = \varepsilon. \quad (241)$$

Celelalte se obțin (relativ) ușor prin calcul:

$$\Pi_1 = \eta^a \rho^b \delta^c K \rightarrow \Pi_1 = \frac{\rho K \delta}{\eta}, \quad (242)$$

care se găsește rapid știind că unitatea de măsură a conductivității hidraulice este

metru pe secundă, iar gruparea celor patru mărimi fizice va da întotdeauna numărul Reynolds; următorul este chiar numărul Reynolds

$$\Pi_3 = \eta^a \rho^b \delta^c V \rightarrow \Pi_3 = \frac{\rho V \delta}{\eta} = \text{Re}, \quad (243)$$

iar ultimul se găsește cunoscând faptul că η/ρ este de fapt un coeficient de difuzie,

$$\Pi_4 = \eta^a \rho^b \delta^c \mathcal{D} \rightarrow \Pi_4 = \frac{\rho \mathcal{D}}{\eta} = \frac{1}{\text{Sc}}, \quad (244)$$

unde Sc este numărul Schmidt, raportul dintre coeficientul de difuzie și viscozitatea cinematică a fluidului (tot un tip de coeficient de difuzie, dar o difuzie a impulsului asociat fluidului).

Obținem o relație cu care putem evalua conductivitatea hidraulică a membranei,

$$K = \frac{\eta}{\rho \delta} f(\varepsilon, \text{Re}, \text{Sc}). \quad (245)$$

De regulă, numărul Schmidt este relativ constant pentru o specie care difuzează prin membrană, iar dependența se discută vizavi de numărul Reynolds și porozitate.

Curgerea sângelui printr-o valvă eliptică

Viteza medie de curgere a sângelui printr-o valvă de secțiune eliptică va depinde de densitatea fluidului, de axa minoră D_1 a secțiunii, de axa majoră D_2 și de diferența de presiune pe valvă Δp (Roselli & Diller 2011). Relația funcțională va fi de forma

$$V = f(\rho, D_1, D_2, \Delta p), \quad (246)$$

în care cele cinci mărimi fizice se reduc la trei fundamentale, deci două grupuri adimensionale. Vom alege trei mărimi de bază, ρ , Δp și D_1 . Vom obține

$$\Pi_1 = \rho^a \Delta p^b D_1^c V \quad (247)$$

și

$$\Pi_2 = \rho^a \Delta p^b D_1^c D_2. \quad (248)$$

Știind că produsul ρV^2 este presiunea dinamică, primul grup adimensional va fi

$$\Pi_1 = \frac{\rho V^2}{\Delta p}. \quad (249)$$

Întrucât raportul dintre cele două axe ale secțiunii eliptice este un număr adimensional,

$$\Pi_2 = \frac{D_2}{D_1}. \quad (250)$$

Relația funcțională va fi

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \rightarrow \frac{\rho V^2}{\Delta p} = f\left(\frac{D_2}{D_1}\right) \rightarrow V = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} f\left(\frac{D_2}{D_1}\right). \quad (251)$$

Golirea unei seringi sub acțiunea câmpului gravitațional

Aceasta este o aplicație cu care am reușit să uimesc câțiva studenți la începutul cursului. Am umplut o seringă (fără piston) cu apă, cronometrând timpul în care aceasta se scurge sub acțiunea câmpului gravitațional. Coloana de apă are o înălțime inițială h_0 . Lichidul se scurge liber sub acțiunea câmpului gravitațional g . Diametrul corpului principal este D , iar cel al îngustării d .

Putem propune o relație funcțională pentru timpul de golire de tipul

$$T_g = f(h_0, g, D, d). \quad (252)$$

Cele patru mărimi fizice se reduc la două mărimi fundamentale (lungime și timp). Putem alege g și h_0 pentru a obține

$$\Pi_1 = g^a h_0^b T_g \rightarrow \Pi_1 = T_g \sqrt{\frac{g}{h_0}}, \quad (253)$$

$$\Pi_2 = g^a h_0^b D \rightarrow \Pi_2 = \frac{D}{h_0}, \quad (254)$$

și

$$\Pi_3 = g^a h_0^b d \rightarrow \Pi_3 = \frac{d}{h_0}. \quad (255)$$

Relația obținută,

$$T_g = \sqrt{\frac{h_0}{g}} f\left(\frac{D}{h_0}, \frac{d}{h_0}\right), \quad (256)$$

se poate simplifica combinând două dintre cele trei grupuri adimensionale. Vom obține

$$T_g = f\left(\frac{D}{d}\right) \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (257)$$

Prin experiment – dar și din primul curs de care vorbeam mai devreme, vezi (Pătrașcu, 2024a) – se obține

$$T_g = \sqrt{2} \left(\frac{D}{d} \right)^2 \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (258)$$

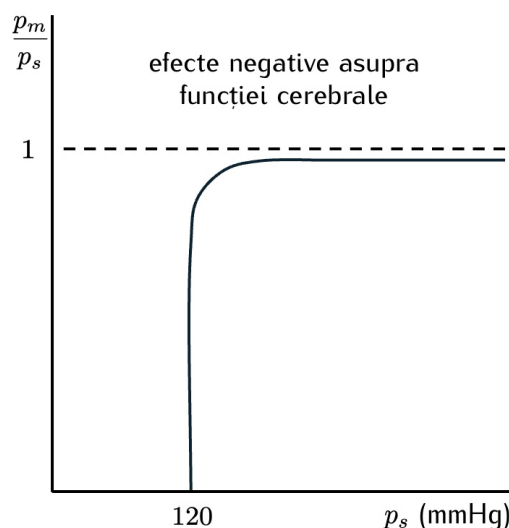
Când obții prin teorie o valoare extrem, extrem de apropiată de valoarea măsurată, impactul acestui experiment asupra studenților este unul masiv. Cel puțin până la examen!

Pragul sistolic impus de câmpul gravitațional

Inima este o pompă care are rolul de a asigura presiunea necesară pentru a trimite sângele către creier, arteriole și mai departe către capilarele din corpul uman. O presiune prea mică, și fluidul nu va ajunge la sursă; o presiune prea mare, și creierul suferă! Din acest motiv, animalele au evoluat astfel încât presiunea dezvoltată de inimă în timpul sistolei să nu depășească o valoare de prag. O putem estima ținând cont de presiunea manometrică necesară pentru a pompa sângele într-un organism având o înălțime a corpului H în câmp gravitațional standard.

Chiar dacă presiunea dezvoltată de inimă nu va trebui să învingă câmpul gravitațional pe toată înălțimea corpului (inima este mai aproape de creier decât de picioare), pragul critic se poate estima ca raport între presiunea manometrică necesară pentru a ridica sângele la înălțimea H și presiunea sistolică (Vogel, 1998)

$$\Pi = \frac{p_m}{p_s} = \frac{\rho g H}{p_s}. \quad (259)$$



Majoritatea mamiferelor dezvoltă aproximativ aceeași presiune sistolică, circa 120 mmHg, ce corespunde unei înălțimi manometrice de 1.7 m. Pe măsură ce organismul atinge înălțimi mai mari, presiunea sistolică va crește (spre exemplu, 300 mmHg pentru girafe) astfel încât raportul dintre presiunea manometrică și presiunea sistolică să rămână subunitar. Valori supraunitare implică efecte negative asupra funcției cerebrale și nu se regăsesc în regnul animal.

Hemodializă

De regulă, procesul de dializă implică următoarele variabile: timpul t (s), rata de producere a toxinelor $\dot{m}$ (mg/min), concentrația de toxine C (kg/m³), debitul de dializă Q (m³/s) și volumul de distribuție $\mathcal{V}$ (m³). Relația funcțională va fi

$$(t, \dot{m}, C, Q, \mathcal{V}). \quad (260)$$

Vom alege Q, t și $\dot{m}$ ca mărimi de bază. Vom obține două grupuri adimensionale

$$\Pi_1 = Q^a t^b \dot{m}^c C = \frac{CQ}{\dot{m}}, \quad (261)$$

și

$$\Pi_2 = Q^a t^b \dot{m}^c \mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}}{tQ}. \quad (262)$$

Soluția analitică ce descrie procesul de dializă este (Bonert & Saville, 2010)

$$C(t) - \frac{\dot{m}}{Q} = \left(C_0 - \frac{\dot{m}}{Q} \right) e^{-tQ/\mathcal{V}}, \quad (263)$$

unde C_0 este concentrația la momentul inițial. Folosind grupurile adimensionale obținute anterior, putem rescrie soluția analitică în variantă adimensională,

$$\Pi_1 - 1 = (\Pi_{1,0} - 1) e^{-1/\Pi_2} \rightarrow \frac{\Pi_1 - 1}{\Pi_{1,0} - 1} = e^{-1/\Pi_2}, \quad (264)$$

de unde, prin logaritmare, vom obține

$$\frac{1}{\Pi_2} = \ln \left(\frac{\Pi_{1,0} - 1}{\Pi_1 - 1} \right), \quad (265)$$

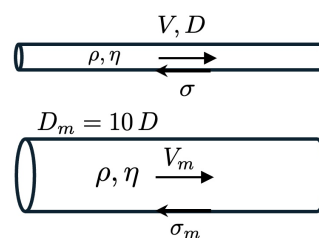
unde $\Pi_{1,0} = C_0 Q / \dot{m}$.

Scalare prin similitudine

Un model de scară pentru determinarea efortului tangențial în capilare

Să considerăm un vas capilar cu diametrul D prin care curge un fluid cu densitate ρ și viscozitate η . Gradientul de viteză va determina un efort tangențial de frecare la peretele vasului, σ , care, la astfel de dimensiuni, este greu de măsurat *in vivo*, dar a cărui valoare este extrem de importantă. De regulă, se folosesc simulări numerice pentru a calcula distribuția de viteză care va da, prin intermediul relației constitutive, distribuția de eforturi. Experimental, se poate estima acest efort tangențial prin similitudine.

Pentru aceasta avem nevoie de un model la o scară mai mare, care să permită astfel de măsurători (spre exemplu, PIV – Particle Image Velocimetry – prin care se determină distribuția de viteză). Vom considera ca model o conductă având diametrul de $D_m = 10 D$ prin care va curge un fluid cu aceleași proprietăți de material. Tot ceea ce trebuie să facem acum este să punem fluidul în mișcare. Cu ce viteză? Aici intervine analiza dimensională!



Problema implică cinci mărimi fizice relevante

$$(\rho, V, D, \eta, \sigma). \quad (266)$$

Întrucât eforturile tangențiale au de a face mai mult cu viscozitatea decât cu densitatea fluidului, vom alege viscozitatea printre cele trei mărimi de bază pentru a forma cele două grupuri adimensionale. Prin calcul (sau prin intuiția căpătată din experiențele anterioare!) vom găsi

$$\Pi_1 = \frac{\rho V D}{\eta} = \text{Re} \quad \text{și} \quad \Pi_2 = \frac{\sigma D}{\eta V}. \quad (267)$$

Experimentul la scară mai mare (modelul) va reflecta fizica fenomenului care se desfășoară la scară mai mică dacă cele două grupuri adimensionale respectă condițiile de similitudine dinamică, în acest caz

$$\text{Re}_m = \text{Re}, \quad \Pi_{2,m} = \Pi_2, \quad (268)$$

care implică

$$\frac{\rho V_m D_m}{\eta} = \frac{\rho V D}{\eta}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{\sigma_m D_m}{\eta V_m} = \frac{\sigma D}{\eta V}, \quad (269)$$

unde indicele m descrie modelul. Din prima relație obținem răspuns la prima întrebare

$$V_m = V \frac{D}{D_m} = \frac{1}{10} V. \quad (270)$$

Acum putem determina efortul tangențial la peretele vasului model. Să presupunem că prin tehnici de măsură PIV vom găsi $\sigma_m = 0.3$ Pa (mai întâi vom determina distribuția de viteză, apoi distribuția de eforturi pentru a evalua σ la peretele vasului). Folosind cea de-a doua condiție de similitudine dinamică, vom estima efortul tangențial de frecare la peretele vasului capilar

$$\frac{\sigma_m D_m}{V_m} = \frac{\sigma D}{V} \rightarrow \sigma = \sigma_m \frac{D_m}{D} \frac{V}{V_m} = \sigma_m \left(\frac{D_m}{D} \right)^2 = 30 \text{ Pa}. \quad (271)$$

O demonstrație a teoremei lui Pitagora prin analiză dimensională

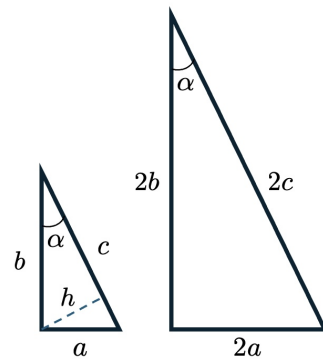
Dublează cele două catete ale triunghiului din imagine și vei dubla ipotenuza. Și înălțimea, și aria triunghiului. Unghiurile vor rămâne neschimbate. Acesta este un caz de similitudine geometrică. Există cazuri (foarte rare) unde se impune o similitudine geometrică afină (factori de scalare diferiți pentru cele trei axe), dar aceste cazuri reprezintă excepția, nu regula.

Teorema lui Pitagora se poate demonstra prin argumente ce țin de analiză dimensională (Migdal & Leggett, 1977). Intuim faptul că aria triunghiului va depinde de ipotenuză și de unghiul α , deci

$$A = f(c, \alpha). \quad (272)$$

Se găsesc două grupuri adimensionale întrucât α este deja un număr adimensional,

$$\frac{A}{c^2} = f(\alpha) \rightarrow A = c^2 f(\alpha). \quad (273)$$



Ariile celor două triunghiuri determinate de înălțimea h se pot găsi într-un mod similar,

$$a^2 f(\alpha) \text{ și } b^2 f(\alpha). \quad (274)$$

Funcția $f(\alpha)$ este aceeași pentru toate cele trei triunghiuri! Cum suma celor două arii va da aria triunghiului cu ipotenuza c , vom găsi relația deja clasică a lui Pitagora dintre ipotenuză și cele două catete

$$c^2 f(\alpha) = a^2 f(\alpha) + b^2 f(\alpha) \rightarrow c^2 = a^2 + b^2. \quad (275)$$

Dacă vă întrebați de ce aria unui triunghi dreptunghic depinde doar de ipotenuză și de unul dintre unghiurile ascuțite sau de ce $f(\alpha)$ este identică pentru cele trei triunghiuri, vă recomand să verificați prin calcul.

Picături la o scară neobișnuit de mare

Un injector circular va forma picături atunci când forțele masice depășesc forțele de tensiune superficială. Diametrul picăturii va depinde de tensiunea superficială, de diferența de densitate dintre fluidul care alcătuiește picătura și mediul fluid extern, de accelerația gravitațională și de diametrul injectorului,

$$D_p = f(\gamma, \Delta\rho, g, D). \quad (276)$$

Vom găsi două grupuri adimensionale,

$$\Pi_1 = \frac{D_p}{D} \text{ și } \Pi_2 = \frac{\Delta\rho g D^2}{\gamma} = \text{Bo}, \quad (277)$$

implicit și o relație pentru diametrul picăturii

$$D_p \sim D f(\text{Bo}). \quad (278)$$

Putem ajunge la o relație aproximativă dacă vom egala cele două forțe dominante,

$$\Delta\rho g \frac{\pi D_p^3}{6} = \pi \gamma D \rightarrow D_p = \sqrt[3]{6} D \text{Bo}^{-1/3} \rightarrow D_p \approx 1,8 D \text{Bo}^{-1/3}. \quad (279)$$

Relația precedentă poate fi rescrisă pentru a evidenția importanța lungimii capilare ($l_c^2 = \gamma/\Delta\rho g$). Vom găsi

$$D_p \approx 1,8 D^{1/3} l_c^{2/3}. \quad (280)$$

Să presupunem că se dorește producerea unor picături de 10 ori mai mari pentru a studia în detaliu, să spunem, zonele de recirculare a lichidului din interiorul picăturii. Cunoaștem deja o relație pentru determinarea diametrului picăturii, pe care l-am putea ajusta modificând diametrul injectorului. Dar să spunem că dorim să studiem fenomenul la o scară neobișnuit de mare. Cum lungimea capilară impune un prag fizic pentru dimensiunile injectoarelor cu care putem produce picături (la un moment dat tensiunea superficială nu va mai fi suficientă pentru a menține o interfață continuă), va trebui să schimbăm și fluidele. Ce diametru de injector și ce pereche de fluide ar trebui să alegem pentru a produce picături de 10 ori mai mari, $D_{p,m} = 10 D_p$?

Vom impune similitudine între model și cazul inițial privind cele două grupuri adimensionale identificate anterior. Vom considera că tensiunea superficială/interfacială nu variază semnificativ între cele două perechi de fluide, astfel încât putem scrie

$$\frac{D_{p,m}}{D_m} = \frac{D_p}{D} \text{ și } \frac{\Delta\rho_m g D_m^2}{\gamma} = \frac{\Delta\rho g D^2}{\gamma}. \quad (281)$$

Din prima egalitate vom găsi $D_m = 10 D$, deci un injector de 10 ori mai mare. Din cea de-a doua vom obține

$$\Delta\rho_m = \Delta\rho \left(\frac{D}{D_m} \right)^2 = \frac{1}{100} \Delta\rho. \quad (282)$$

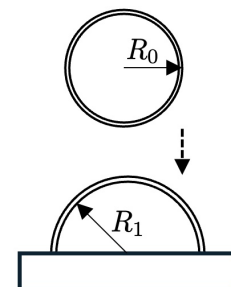
Practic, va trebui să alegem o pereche de fluide având o diferență de densitate de 100 de ori mai mică sau a căror lungime capilară este de 10 ori mai mare, $l_{c,m} = 10 l_c$. Creșterea lungimii capilare împinge pragul critic, până la care se poate observa un proces de formare a picăturilor, către valori mai mari.

Uneori nu va trebui să rezolvi ecuația dacă apelezi la ordine de mărime

Uneori, chiar nu va trebui să rezolvi ecuația întrucât se rezolvă singură. Să luăm cazul unor bule de săpun de rază R_0 plasate pe o suprafață plană. Contactul cu suprafața va forța bula să se transforme într-o bulă semisferică de rază R_1 . Deoarece filmul subțire de lichid este cu mult mai mic față de raza bulei, se va neglija grosimea acestuia. Ce legătură există între R_1 și R_0 ?

Masa fluidului aflat în interiorul bulei se conservă în timpul procesului de transfer pe suprafața plană, deci

$$m_0 = m_1 \text{ sau } \rho_0 \mathcal{V}_0 = \rho_1 \mathcal{V}_1, \quad (283)$$



ceea ce implică

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_0}. \quad (284)$$

Cele două volume se pot determina astfel

$$\mathcal{V}_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \text{ și } \mathcal{V}_1 = \frac{4\pi R_1^3}{6}. \quad (285)$$

În ipoteza în care gazul din interior respectă ecuația de stare, la temperatură constantă, putem scrie

$$p\mathcal{V} = \text{const.} \rightarrow \frac{p_0}{p_1} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_0}, \quad (286)$$

deci

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_0} = \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad (287)$$

Presiunea din interiorul bulei de rază R_0 poate fi estimată via ecuația Young-Laplace (aplicată succesiv interfeței dintre aerul din interior și lichidul care formează pelicula, respectiv între lichid și aerul din exteriorul bulei, aflat la presiune atmosferică p_{at}). Vom obține

$$p_0 - p_{at} = \frac{4\gamma}{R_0}. \quad (288)$$

În mod analog, pentru bula de rază R_1 ,

$$p_1 - p_{at} = \frac{4\gamma}{R_1}, \quad (289)$$

unde am considerat că tensiunea superficială nu variază întrucât interfața este saturată cu surfactant. Înlocuind în ecuația de conservare a masei, vom obține

$$\left(p_{at} + \frac{4\gamma}{R_0}\right) R_0^3 = \left(p_{at} + \frac{4\gamma}{R_1}\right) \frac{R_1^3}{2}, \quad (290)$$

pe care o putem rescrie sub forma unei ecuații algebrice de tipul

$$R_1^3 + \frac{4\gamma}{p_{at}} R_1^2 - 2R_0^3 - \frac{8\gamma}{p_{at}} R_0^2 = 0. \quad (291)$$

Ecuația va avea trei soluții, care nu se găsesc chiar așa de ușor. Dar poate nu va trebui să le găsim chiar pe toate! Să adimensionalizăm ecuația împărțind prin R_0^3 . Vom nota $\hat{R}_1 = R_1/R_0$ și vom obține

$$\hat{R}_1^3 + \Pi \hat{R}_1^2 - 2(1 + \Pi) = 0, \quad (292)$$

unde

$$\Pi = \frac{4\gamma}{p_{at}R_0}. \quad (293)$$

De regulă, scara spațială a bulelor este de ordinul centimetrilor, presiunea atmosferică de ordinul 10^5 Pa, iar tensiunea superficială a peliculei de săpun 0,025 N/m. Înlocuind în grupul adimensional obținut, vom găsi $\Pi \sim 10^{-3}$, cu trei ordine de mărime mai mic față de ceilalți termeni. Acest lucru ne permite să neglijăm toți termenii care conțin acest grup adimensional, ceea ce implică

$$\hat{R}_1^3 \approx 2 \rightarrow R_1^3 \approx 2R_0^3 \rightarrow R_1 \approx \sqrt[3]{2}R_0 \rightarrow R_1 \approx 1,26 R_0, \quad (294)$$

practic răspunsul la întrebarea pe care am formulat-o la început.

Putem estima și dimensiunea bulelor la care totuși va trebui să rezolvăm ecuația. Din condiția ca grupul adimensional să fie de ordinul unității, vom obține

$$\Pi \sim 1 \rightarrow R_0 \sim \frac{4\gamma}{p_{at}} \rightarrow R_0 \approx 10 \mu\text{m}, \quad (295)$$

scară spațială la care nici bulele nu mai sunt ceea ce am presupus noi la început, grosimea peliculei având același ordin de mărime. Pentru a nu complica procedura, am considerat o transformare izotermă, însă rezultatul se poate obține și pentru o transformare izentropă (entropie constantă).

Legea a treia a lui Kepler - o aproximare a masei Soarelui

Legea lui Kepler se poate rezuma printr-o relație între constanta universală a câmpului gravitațional G , masa M a unui corp presupus central sistemului, durata T a orbitei unui obiect în jurul corpului central și raza R a acestei orbite.

Putem obține legea lui Kepler (și) prin analiză dimesnională. Relația funcțională va fi

$$(G, M, T, R). \quad (296)$$

Cele patru mărimi fizice se reduc la trei mărimi fundamentale, de unde vom obține un singur grup adimensional. Prin calcul se obține

$$\Pi = \frac{GMT^2}{R^3}. \quad (297)$$

O relație aproximativă între cele patru mărimi se obține considerând grupul adimensional egal cu o constantă (de regulă egală cu unitatea atunci când se urmărește identificarea modului în care celelalte mărimi fizice contribuie la modificarea unui

parametru de interes). Vom obține

$$GM = \mathcal{C} \frac{R^3}{T^2}, \quad (298)$$

unde $\mathcal{C} = (2\pi)^2$ și se obține prin intermediul ecuațiilor de mișcare.

Ne putem folosi de grupul adimensional obținut anterior pentru a estima masa Soarelui. Pentru obiecte care orbitează Soarele putem scrie

$$GM_S \sim \frac{R_{S-P}^3}{T_{S-P}^2}, \quad (299)$$

unde $S - P$ indică Pământul orbitând în jurul Soarelui.

Pentru obiecte care orbitează în jurul Pământului, spre exemplu Luna, putem scrie

$$GM_P \sim \frac{R_{P-L}^3}{T_{P-L}^2}, \quad (300)$$

unde $P - L$ indică Luna orbitând în jurul Pământului.

Raportând cele două relații anterioare vom obține

$$\frac{M_S}{M_P} \sim \left(\frac{R_{S-P}}{R_{P-L}} \right)^3 \left(\frac{T_{P-L}}{T_{S-P}} \right)^2. \quad (301)$$

Știind că $R_{S-P} \approx 400 R_{P-L}$, iar $T_{S-P} \approx 14 T_{P-L}$, obținem o aproximare pentru masa Soarelui

$$\frac{M_S}{M_P} \sim \frac{400^3}{14^2} \approx 325\,000 \rightarrow M_S \sim 325\,000 M_P, \quad (302)$$

de 325 000 de ori mai mare ca masa Pământului.

Similitudine Froude

Fie că vorbim despre înot sau zbor, viteza de deplasare a unui organism va depinde de mărimea corpului său. Lucrul mecanic dezvoltat de organism trebuie să fie suficient de mare pentru a învinge lucrul mecanic al forțelor de rezistență la înaintare. Cum lucrul mecanic dezvoltat de corp este proporțional cu masa (deci $W_C \propto L^3$, unde L este o lungime caracteristică), iar lucrul mecanic al forțelor de rezistență la înaintare este proporțional cu L^2 ($W_R \sim \rho V^2 L^2 x$, unde x este o distanță oarecare parcursă de corp), putem obține o estimare a dependenței dintre viteza de deplasare și lungimea caracteristică a organismului. Astfel

$$W_C \sim W_R \rightarrow V^2 L^2 \propto L^3 \rightarrow V \propto \sqrt{L}, \quad (303)$$

relație care arată că viteza de deplasare crește cu radicalul lungimii caracteristice. Această lege se cunoaște drept legea lui Froude de echivalență a vitezelor. Legea este valabilă pentru păsări, pești și pentru anumite insecte care trăiesc la suprafața liberă (Bush & Hu, 2006).

Numărul Froude se definește ca raport între forțele de inerție și forțele masice

$$\text{Fr} = \frac{\rho V^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{V^2}{gL}. \quad (304)$$

Pentru unde generate la suprafața liberă a căror lungime de undă este mai mare decât lungimea capilară (aproximativ 3 mm), câmpul gravitațional va tinde să readucă suprafața liberă la o geometrie plană. Dacă vom alege lungimea de undă ca scară spațială caracteristică, deplasarea undelor se realizează la un număr Froude constant, ceea ce arată că undele cu lungimi de undă mai mari se deplasează cu viteze mai mari, o caracteristică a undelor masice (spre deosebire de undele capilare a căror viteză crește pentru lungimi de undă mai mici). Creșterea de viteză va respecta aceeași lege pe care am descoperit-o anterior, $V \propto \sqrt{L}$, motivând astfel și denumirea acesteia.

Ecuatii de mișcare în formă adimensională

Variante ale ecuației Navier-Stokes

Pentru a obține varianta adimensională a ecuației Navier-Stokes,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (305)$$

va trebui să impunem valori de referință pentru necunoscute, respectiv pentru variabilele de care depind aceste necunoscute (patru la număr, $\mathbf{v}$ și p). Vom considera următoarele valori de referință, care vor impune variantele adimensionale ale necunoscutelor, respectiv variabilelor:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \frac{\mathbf{v}}{V} \rightarrow \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} V \\ \hat{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{L} \rightarrow \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} L \\ \hat{t} &= \frac{t}{T} \rightarrow t = \hat{t} T \\ \hat{p} &= \frac{p}{p_0} \rightarrow p = \hat{p} p_0 \\ \hat{\nabla} &= L \nabla \rightarrow \nabla = \frac{1}{L} \hat{\nabla}, \end{aligned}$$

unde $\hat{t}$ este varianta adimensională pentru variabila t - analog pentru celelalte mărimi. Vom obține

$$\rho \frac{V}{T} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + \rho \frac{V^2}{L} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{g} - \frac{p_0}{L} \hat{\nabla} \hat{p} + \eta \frac{V}{L^2} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}. \quad (306)$$

Regula este foarte simplă: se scot în față *unitățile de măsură* pentru fiecare termen care conține cel puțin o necunoscută și/sau o variabilă! Vom împărți ecuația prin

$\eta V/L^2$ și vom obține

$$\text{Re} \left[\text{St} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \text{ReEu} \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}, \quad (307)$$

unde $\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$ indică direcția câmpului gravitațional, iar $|\mathbf{g}| = g$ este modulul vectorului accelerație gravitațională. Prin evaluarea acestor grupuri adimensionale se poate decide care termeni pot fi neglijăți atunci când se caută o aproximare a ecuațiilor de mișcare.

Un caz atipic este cel pentru care $\text{Re} \gg 1$, ceea ce implică faptul că am putea neglija forțele de frecare vâscoasă, caz care se reduce la o curgere a unui fluid ideal ($\eta \rightarrow 0$). Nu întotdeauna această simplificare a ecuației de mișcare este și realistă. Spre exemplu, în cazul curgerilor la numere Reynolds mari în jurul unui obiect sferic, desprinderea stratului limită este considerabil influențată dacă pe linia de desprindere a fluidului de suprafața solidă vom adăuga un simplu inel circular cu dimensiuni mult mai mici comparativ cu scara spațială proprie a curgerii. Cum această mică modificare introduce efecte majore în curgere, în mod analog, ultimul termen al ecuației de mișcare (cel pe care am decis să îl neglijăm știind că ordinul său de mărime este mult mai mic față de toți ceilalți dacă $\text{Re} \gg 1$) poate introduce modificări majore predicțiilor teoretice.

O variantă adimensională adaptată a ecuației Navier-Stokes, pentru curgerile cu periodicitate din sistemul circulator, implică definirea numărului Womersley, practic o variantă a produsului dintre numărul Reynolds și numărul Strouhal,

$$\text{Wo}^2 = \frac{\omega \rho L^2}{\eta} = \frac{\rho V L}{\eta} \cdot \frac{\nu L}{V} = 2\pi \text{ReSt} \rightarrow \text{Wo} = \sqrt{2\pi \text{ReSt}}, \quad (308)$$

unde $\omega = 2\pi\nu$ reprezintă pulsația (în radiani pe secundă).

În unele situații, scara temporală asociată fenomenului rezultă dintr-o grupare a scărilor spațiale caracteristice cu valoarea de referință a câmpului de viteză, $T = L/V$. Varianta adimensională obținută anterior nu diferă cu mult, în acest caz numărul Strouhal fiind egal cu unitatea, $\text{St} = 1$,

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \text{ReEu} \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}. \quad (309)$$

Unele situații impun o scară proprie pentru presiune, formată prin intermediul unor eforturi relevante în procesul investigat. Putem concepe patru situații:

- ordin de mărime dat de presiunea dinamică, $p_0 \sim \rho V^2$, practic $\text{Eu} \sim 1$. Ecuația

obținută anterior va căpăta următoarea formă

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \text{Re} \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}. \quad (310)$$

- ordin de mărime dat de presiunea hidrostatică, $p_0 \sim \rho g L$. Ecuația obținută anterior va căpăta următoarea formă

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \hat{\nabla} \hat{p} \right) + \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}. \quad (311)$$

- ordin de mărime dat de eforturile tangențiale, $p_0 \sim \eta V/L$. Ecuația va căpăta următoarea formă

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}. \quad (312)$$

În cazul unor numere Reynolds mult mai mici decât unitatea ($\text{Re} \ll 1$ - forțe de inerție neglijabile), ecuația Navier-Stokes se reduce la aproximația Stokes,

$$\hat{\nabla} \hat{p} = \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}} \rightarrow \nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (313)$$

- ordin de mărime dat de presiunea capilară, $p_0 \sim \gamma/L$. Ecuația va căpăta următoarea formă

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \frac{\text{Re}}{\text{We}} \hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}. \quad (314)$$

Înmulțind ecuația cu We/Re vom obține

$$\text{We} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{v}} \right] = \text{Bo} \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} - \hat{\nabla} \hat{p} + \text{Ca} \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{v}}, \quad (315)$$

regăsind cele trei grupuri adimensionale caracteristice fenomenelor guvernate de tensiunea superficială. Dacă scara la care se desfășoară fenomenul implică numere $\text{Bo} \ll 1$, se pot neglija efectele induse de câmpul gravitațional.

Adimensionalizarea ecuației folosind presiunea capilară este atipică, de regulă aceasta fiind folosită în cazul condițiilor la limită. Spre exemplu, la nivelul suprafeței de separare dintre un lichid newtonian și aer, echilibrul de eforturi pe direcție normală va fi

$$p_2 - p_1 - 2\eta \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{n} = \gamma \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (316)$$

unde p_2 este presiunea în lichid, dar în imediata vecinătate a interfeței, p_1 presiunea din aer și $\bar{\bar{\mathbf{D}}}$ este tensorul viteză de deformare specifică. Dacă vom considera următoarele transformări:

$$p \rightarrow \rho V^2 \hat{p}, \quad \bar{\bar{\mathbf{D}}} \rightarrow \frac{V}{L} \hat{\bar{\bar{\mathbf{D}}}}, \quad \nabla \rightarrow \frac{1}{L} \hat{\nabla}, \quad (317)$$

unde $\hat{p}, \hat{\bar{\bar{\mathbf{D}}}}, \hat{\nabla}$ sunt variantele adimensionale, vom găsi

$$\text{We} \Delta \hat{p} - 2 \text{Ca} \mathbf{n} \cdot \hat{\bar{\bar{\mathbf{D}}}} \cdot \mathbf{n} = \hat{\nabla} \cdot \mathbf{n}, \quad (318)$$

ecuație ce reprezintă varianta adimensională a condiției la limită.

Transformările de scară nu trebuie să modifice ecuația

Ecuația Navier-Stokes este în esență o ecuație care descrie cum se transportă și cum difuzează impulsul într-un fluid. Pentru a găsi transformările care lasă ecuația neschimbată, va trebui să ținem cont de faptul că accelerația locală (prima derivată a vitezei în raport cu timpul) este proporțională cu a doua derivată a vitezei în raport cu spațiul! Procedura de scalare va scoate în față un factor constant ridicat la o putere egală cu ordinul de derivare. În acest sens, vom propune următoarele transformări

$$t \rightarrow s^2 t \quad \text{și} \quad x \rightarrow s x, \quad (319)$$

ceea ce implică

$$v \sim \frac{x}{t} \rightarrow v \sim \frac{s}{s^2} \frac{x}{t} \implies v \rightarrow s^{-1} v. \quad (320)$$

și $g \rightarrow s^{-3} g$. Pentru presiune vom obține

$$p \sim \left(\rho \mathcal{V} \frac{v}{t} \right) / x^2 \sim \frac{s^3 s^{-1}}{s^2 s^2} \left(\rho \mathcal{V} \frac{v}{t} \right) / x^2 \implies p \rightarrow s^{-2} p. \quad (321)$$

Înlocuind în ecuația Navier-Stokes vom obține

$$\rho \left(\frac{s^{-1}}{s^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{s^{-2}}{s} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = s^{-3} \rho \mathbf{g} - \frac{s^{-2}}{s} \nabla p + \frac{s^{-1}}{s^2} \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (322)$$

Se observă faptul că ecuația

$$\rho s^{-3} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = s^{-3} \rho \mathbf{g} - s^{-3} \nabla p + s^{-3} \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (323)$$

se transformă tot în ecuația Navier-Stokes,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (324)$$

ceea ce căutam de la bun început! Acest lucru se poate verifica via numărul Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{\rho s^{-1} V s L}{\eta} = \text{Re}, \quad (325)$$

ceea ce arată invarianța grupului adimensional față de transformarea propusă, o caracteristică intrinsecă a oricărui grup adimensional!

Ecuția difuzie-advecție

Ecuția difuzie-advecție, valabilă în cazul unui coeficient de difuzie constant are următoarea formă

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) = \mathcal{D} \nabla^2 c, \quad (326)$$

unde c este concentrația, $\mathcal{D}$ este coeficientul de difuzie, $\mathbf{v}$ este viteza. Vom avea nevoie de varianta adimensională a ecuației pentru a înțelege în ce condiții putem neglija advecția, respectiv difuzia. Vom presupune următoarele valori de referință: V_0 valoare intrinsec legată de advecție (curgere), L_0 ca dimensiune caracteristică a geometriei, C_0 și $T_0 \sim L_0^2/\mathcal{D}$, o concentrație și un timp caracteristice procesului de difuzie.

Vom impune

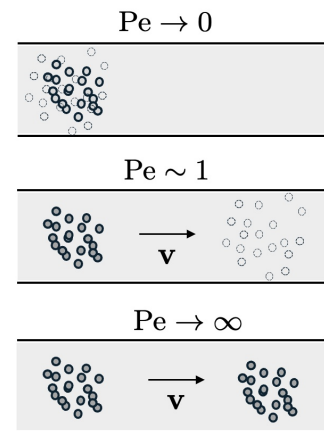
$$c = \hat{c} C_0, \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} L_0, t = \hat{t} T_0, \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} V_0.$$

Vom obține

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} + \text{Pe} \hat{\nabla} \cdot (\hat{c} \hat{\mathbf{v}}) = \hat{\nabla}^2 \hat{c}, \text{ unde } \text{Pe} = \frac{t_{dif}}{t_{adv}} = \frac{L_0 V_0}{\mathcal{D}}$$

este numărul lui Péclet, raportul dintre timpul caracteristic al difuziei, $t_{dif} \sim L_0^2/\mathcal{D}$, și timpul caracteristic al advecției, $t_{adv} \sim L_0/V_0$. Dacă $\text{Pe} \ll 1$, difuzia domină procesul de transport de substanță, iar ecuația difuzie-advecție se reduce la ecuația difuziei

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} = \hat{\nabla}^2 \hat{c} \rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D} \nabla^2 c. \quad (327)$$



Dacă $Pe \rightarrow \infty$, procesul de difuzie nu contribuie semnificativ la transportul de substanță.

Prima lege a termodinamicii într-o variantă adimensională

Vom considera următoarea formă a ecuației conservării energiei în cazul unui fluid,

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi, \quad (328)$$

unde e este energia internă specifică (pe unitatea de masă), $k = \alpha \rho c_p$ este conductivitatea termică, α este difuzivitatea termică, T este temperatura, iar Φ este funcția de disipație având ca origine forțele de frecare datorate viscozității fluidului. Funcția de disipație este proporțională cu produsul dintre tensorul extratensiune și tensorul viteză de deformare specifică, $\Phi = \sigma_{ij} D_{ij} \sim \eta (\partial v_i / \partial x_j)^2$, unde $\sigma_{ij} = 2\eta D_{ij}$, iar notația presupune convenția de sumare (peste indicii care se repetă) a lui Einstein. Pentru a obține varianta adimensională, putem considera următoarele transformări

$$\begin{aligned} x &\rightarrow L \hat{x}, t \rightarrow L/V \hat{t} \\ \mathbf{v} &\rightarrow V \hat{\mathbf{v}}, T \rightarrow T_0 \hat{T}, \\ e &\rightarrow k_B T_0 / (\rho L^3) \hat{e}, \\ p &\rightarrow \rho V^2 \hat{p}, k \rightarrow k_0 \hat{k}. \end{aligned}$$

unde k_0 este o valoarea de referință pentru conductivitatea termică, iar T_0 este o temperatură de referință. Vom obține

$$\frac{\rho k_B T_0 V}{\rho L^4} \left(\frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{e} \right) = -\frac{\rho V^3}{L} \hat{p}(\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{v}}) + \frac{k_0 T_0}{L^2} \hat{\nabla} \cdot (\hat{k} \hat{\nabla} \hat{T}) + \frac{\eta V^2}{L^2} \hat{\Phi}. \quad (329)$$

Putem estima $k_B T_0 \sim \eta L \mathcal{D}$ via relația Stokes-Einstein, unde $\mathcal{D}$ este coeficientul de difuzie. Eliminând $\rho V^3 / L$ obținem

$$\frac{\eta \mathcal{D}}{\rho V^2 L^2} \left(\frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{e} \right) = -\hat{p}(\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{v}}) + \frac{k_0 T_0}{\rho V^3 L} \hat{\nabla} \cdot (\hat{k} \hat{\nabla} \hat{T}) + \frac{\eta}{\rho V L} \hat{\Phi}. \quad (330)$$

Identificăm următoarele grupuri adimensionale

$$\frac{1}{\text{RePe}} \left(\frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{e} \right) = -\hat{p}(\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{v}}) + \frac{k_0 T_0}{\rho V^3 L} \hat{\nabla} \cdot (\hat{k} \hat{\nabla} \hat{T}) + \frac{1}{\text{Re}} \hat{\Phi}. \quad (331)$$

În ipoteza în care $k_0 = \alpha \rho c_p$, iar căldura specifică pe unitatea de masă este de același ordin de mărime cu energia de agitație termică, $c_p T_0 \sim k_B T_0 / (\rho L^3) \sim \eta \mathcal{D} / (\rho L^2)$ rezultă

$$\frac{k_0 T_0}{\rho V^3 L} \xrightarrow{k_0 = \alpha \rho c_p} \frac{\alpha c_p T_0}{V^3 L} \xrightarrow{c_p T_0 \sim k_B T_0 / (\rho L^3)} \frac{1}{\text{RePe}} \frac{\alpha \rho / \eta}{V L \rho / \eta} \rightarrow \frac{1}{\text{Re}^2 \text{PePr}}. \quad (332)$$

Vom obține

$$\frac{1}{\text{RePe}} \left(\frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{e} \right) = -\hat{p}(\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\text{Re}^2 \text{PePr}} \hat{\nabla} \cdot (\hat{k} \hat{\nabla} \hat{T}) + \frac{1}{\text{Re}} \hat{\Phi}. \quad (333)$$

Ecuția Lucas-Washburn pentru capilaritate

Un tub capilar (orice tub cu raza mai mică decât lungimea capilară, $l_c^2 = \gamma / \rho g$) este pus în contact cu suprafața liberă a unui lichid. La contactul dintre cele trei faze (aer, lichid și peretele capilarului) se va forma un menisc a cărui curbura va determina curgerea lichidului. Ca urmare a acestui fapt, lichidul va pătrunde în mod natural (fără intervenție din exterior!) în tubul dispus orizontal. Considerăm un tub de rază R și un lichid incompresibil și newtonian care udă perfect peretele acestui tub (unghi de contact nul). Ecuția care descrie poziția interfeței $z(t)$ se poate obține plecând de la a doua lege a lui Newton. Putem scrie

$$\frac{d}{dt} (\rho \pi R^2 z \dot{z}) = \pi R^2 (p_i - p_z) + 2\pi R z \sigma, \quad (334)$$

unde $\rho \pi R^2 z(t)$ este masa lichidului aflat în tub la momentul t , $\dot{z}$ este viteza de avans a meniscului, p_i este presiunea de la intrare în capilar, p_z este presiunea de la nivelul meniscului, iar $2\pi R z \sigma$ este forța de frecare datorată viscozității, unde $\sigma = -4\eta \dot{z} / R$ este efortul tangențial de frecare. Presiunea de la intrare este dată de presiunea atmosferică, de presiunea hidrostatică aferentă coloanei de lichid de înălțime h aflată deasupra tubului capilar, din care se scade contribuția curgerii prin intermediul presiunii dinamice,

$$p_i = p_{at} + \rho g h - \frac{1}{2} \rho \dot{z}^2. \quad (335)$$

La nivelul meniscului, presiunea din imediata vecinătate a acestuia este mai mică decât presiunea atmosferică și este dată de ecuația Young-Laplace. Putem scrie

$$p_z = p_{at} - \frac{2\gamma}{R}. \quad (336)$$

Prin înlocuire vom obține

$$\rho\pi R^2 z\ddot{z} = 2\pi R\gamma + \pi R^2 \rho gh - 8\pi\eta z\dot{z} - \frac{3}{2}\pi R^2 \rho \dot{z}^2. \quad (337)$$

Ne putem aștepta ca pe termen lung forțele de frecare să domine această curgere, din acest motiv vom adimensionaliza scara temporală cu timpul visco-capilar, iar poziția interfeței cu raza tubului capilar,

$$\hat{t} = \frac{t}{t_v} = \frac{t}{\eta R/\gamma} \implies t \rightarrow \frac{\eta R}{\gamma} \hat{t}, \text{ respectiv } z \rightarrow R \hat{z}. \quad (338)$$

Înlocuind, vom obține varianta adimensională

$$\text{La} \hat{z}\ddot{\hat{z}} = 2 + \text{Bo} - 8\hat{z}\dot{\hat{z}} - \frac{3}{2}\text{La} \dot{\hat{z}}^2 \quad (339)$$

unde $\text{La} = \rho R\gamma/\eta^2$ definește numărul Laplace, iar $\text{Bo} = \rho gh/(\gamma/R)$ definește numărul Bond, aici raportul dintre presiunea hidrostatică și presiunea capilară. Ecuația obținută este în variantă adimensională, practic o ecuație diferențială de grad doi neliniară. Pentru fluide cu viscozitate mare $\text{La} \ll 1$, ceea ce implică

$$\hat{z}\ddot{\hat{z}} = (2 + \text{Bo})/8. \quad (340)$$

Dacă vom considera drept condiție inițială $\hat{z}(0) = 0$, putem integra ecuația diferențială obținută anterior astfel

$$\hat{z}d\hat{z} = \frac{2 + \text{Bo}}{8}d\hat{t} \rightarrow \hat{z} = \sqrt{\frac{2 + \text{Bo}}{4}}\hat{t}. \quad (341)$$

În cazul unor presiuni capilare mult mai mari ca presiunea hidrostatică de la intrarea în capilar, $\text{Bo} \ll 1$, practic un capilar pus în contact cu lichidul în imediata vecinătate a suprafeței libere, vom obține legea lui Washburn pentru capilaritate

$$\hat{z} = \sqrt{\frac{1}{2}}\hat{t} \rightarrow z = \sqrt{\frac{R\gamma}{2\eta}}t. \quad (342)$$

Relația obținută este caracteristică fenomenelor difuzive întrucât soluția variază cu $\sqrt{t}$, aici vorbind de o difuzie a efectelor datorate viscozității.

Curgere cu suprafață liberă peste un obstacol

Ce se întâmplă cu adâncimea unui curent de apă dacă acesta întâlnește un obstacol? Scade sau crește? Depinde! Ecuația care leagă viteza curentului de fluid și adâncimea acestuia se poate obține via Bernoulli și continuitate. Ecuația are următoarea formă

$$\frac{1}{2}V^2 + gh_\infty \frac{V_\infty}{V} = \frac{1}{2}V_\infty^2 + gh, \quad (343)$$

unde V și h sunt viteza medie și adâncimea în secțiunea obstacolului, iar V_∞ și h_∞ sunt viteza medie și adâncimea în amonte de obstacol. Vom aduce această ecuație la o formă adimensională împărțind la gh_∞ . Vom obține

$$\frac{1}{2}Fr_\infty \hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}} = \frac{1}{2}Fr_\infty + \hat{h}, \quad (344)$$

unde $Fr_\infty = V_\infty^2/gh_\infty$ este numărul Froude, $\hat{V} = V/V_\infty$ și $\hat{h} = h/h_\infty$. Discuția acestei relații se face căutând minimul funcției din membrul stâng,

$$f(\hat{V}) = \frac{1}{2}Fr_\infty \hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}}. \quad (345)$$

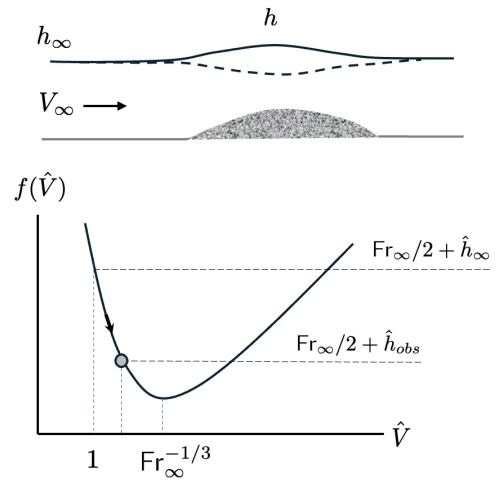
Condiția de minim va fi

$$\frac{df}{d\hat{V}} = 0 \rightarrow Fr_\infty \hat{V} - \frac{1}{\hat{V}^2} = 0,$$

de unde obținem

$$\hat{V} = Fr_\infty^{-1/3} \rightarrow V = (V_\infty gh_\infty)^{1/3}.$$

Dacă $Fr_\infty < 1$ atunci $Fr_\infty^{-1/3} > 1$, ceea ce arată faptul că $\hat{V} = 1$, care se obține dacă $V = V_\infty$, se află în stânga punctului de minim. Cum funcția este descrescătoare, $\hat{V}_{obstacol} > 1$, deci $V_{obstacol} > V_\infty$, ceea ce arată că viteza crește, deci $h < h_\infty$, suprafața liberă se apropie de obstacol. În mod similar, dacă $Fr_\infty > 1$ suprafața liberă se îndepărtează de obstacol.



Unde capilare sau unde masice?

În general, undele create la suprafața liberă nu au viață lungă deoarece, fie gravitația, fie tensiunea superficială acționează pentru a aduce suprafața liberă la o geometrie plană! În figura alăturată sunt reprezentate două tipuri de unde la suprafața liberă a apei. Care dintre cele două se dezvoltă ca urmare a impactului unei picături de apă cu suprafața liberă, respectiv, care rezultă în urma unui impact cu o piatră mai mare?

Vom pleca de la relația de dispersie a undelor la suprafața liberă. Viteza de fază a acestor unde, considerând neglijabilă influența viscozității este

$$v^2 = \left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh(kh), \quad (346)$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă și h este adâncimea lichidului la suprafața căruia undele se propagă. Vom aduce această relație într-o formă adimensională pentru a discuta o serie de cazuri limită care ne vor oferi o perspectivă interesantă asupra tiparului de undă de la suprafața liberă. Putem împărți prin $\gamma k/\rho$ pentru a obține

$$\hat{v}^2 = \left(\frac{\rho g}{\gamma k^2} + 1 \right) \tanh(\hat{k}), \quad (347)$$

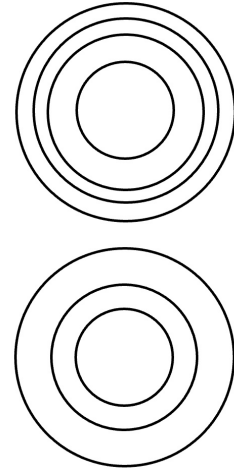
unde $\hat{v}^2 = v^2 \rho / \gamma k$ și $\hat{k} = kh$, deja adimensional întrucât este argumentul funcției tangente hiperbolice. Putem defini numărul Bond asociat undelor folosind lungimea de undă λ ca lungime caracteristică, anume

$$\text{Bo} = \frac{\rho g \lambda^2}{(2\pi)^2 \gamma} = \frac{\rho g}{\gamma k^2}, \quad (348)$$

unde $(2\pi)^2$ a fost adăugat pentru a introduce numărul de undă. În aceste condiții, relația obținută anterior devine

$$\hat{v}^2 = (\text{Bo} + 1) \tanh(\hat{k}). \quad (349)$$

Discuția relației se face în funcție de cele două grupuri adimensionale, Bo și $\hat{k}$.



Dacă $Bo \gg 1$ forțele masice domină în detrimentul forțelor de tensiune superficială (unde masice). Dacă $\hat{k} \gg 1$, adică $h \gg \lambda$ (ape adânci), $\tanh(\hat{k}) \approx 1$, deci

$$\hat{v}^2 \approx Bo \rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (350)$$

ceea ce arată că undele mai lungi se deplasează cu viteze mai mari!

Dacă $\hat{k} \ll 1$, adică $h \ll \lambda$ (ape de mică adâncime), $\tanh(\hat{k}) \approx \hat{k}$ (vezi dezvoltarea în serie Taylor), rezultă

$$\hat{v}^2 \approx \hat{k}Bo \rightarrow v = \sqrt{gh}, \quad (351)$$

deci unde care se deplasează cu viteză constantă indiferent de lungimea de undă (unde non-dispersive).

Dacă $Bo \ll 1$ forțele de tensiune superficială domină în detrimentul forțelor masice (unde capilare). Dacă $\hat{k} \gg 1$, adică $h \gg \lambda$ (ape adânci), $\tanh(\hat{k}) \approx 1$, deci

$$\hat{v}^2 \approx 1 \rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}, \quad (352)$$

ceea ce arată că undele mai lungi se deplasează cu viteze mai mici!

Dacă $\hat{k} \ll 1$, adică $h \ll \lambda$ (ape de mică adâncime), $\tanh(\hat{k}) \approx \hat{k}$, rezultă

$$\hat{v}^2 \approx \hat{k} \rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma k^2 h}{\rho}}. \quad (353)$$

În consecință, primul tipar din figură este asociat undelor capilare, iar cel de-al doilea undelor masice!

O variantă adimensională a ecuației lui Bernoulli

Ecuația lui Bernoulli reprezintă una dintre cele mai importante ecuații din mecanica fluidelor, în principal deoarece prin intermediul acesteia se înțelege de ce la o îngustare a secțiunii de curgere (acolo unde, în condițiile unui debit constant, viteza crește) presiunea scade! De regulă, ecuația se scrie sub forma unei sume a trei presiuni,

$$\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho g z = \text{const.} \quad (354)$$

Putem obține varianta adimensională relativ ușor împărțind la ρV^2 . Vom obține

$$\frac{1}{2} + \frac{p}{\rho V^2} + \frac{\rho g z}{\rho V^2} = \text{const.} \quad (355)$$

Constanta, deși se modifică în valoare, tot constantă rămâne. Identificăm două grupuri adimensionale cunoscute, Euler și Froude,

$$\frac{1}{2} + Eu + \frac{1}{Fr} = \text{const.} \rightarrow Fr(1 + 2Eu) + 2 = \text{const.} \quad (356)$$

Dacă se iau în considerare și pierderile de presiune datorate frecărilor fluid-solid, respectiv fluid-fluid, într-o curgere laminară, relația lui Bernoulli pentru un tub de curent se poate scrie astfel

$$\alpha_1 \frac{\rho V_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \alpha_2 \frac{\rho V_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + f \frac{L}{D} \frac{\rho V_2^2}{2}, \quad (357)$$

unde L este lungimea tubului de curent, iar D este diametrul. Pentru o curgere laminară, $\alpha_{1,2} = 2$ și $f = 64/Re$, unde $Re = \rho V D / \eta$. Să presupunem că tubul de curent nu variază în secțiune, deci $V_1 = V_2 = V$. Vom împărți prin ρV^2 și vom obține

$$Eu_1 + \frac{1}{Fr_1} = Eu_2 + \frac{1}{Fr_2} + \frac{32 L}{Re D}. \quad (358)$$

Dacă între cele două secțiuni nu există o diferență de nivel și dacă vom defini un număr Euler pornind de la diferența de presiune, $Eu = \Delta p / \rho V^2$ atunci

$$Eu Re = 32 \frac{L}{D}, \quad (359)$$

care, de fapt, reprezintă relația Hagen-Poiseuille, întrucât

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{32 \eta L}{\rho V D} \rightarrow V = \frac{\Delta p D^2}{32 \eta L} \xrightarrow{\times (\pi D^2/4)} Q = \frac{\Delta p \pi D^4}{128 \eta L}, \quad (360)$$

relație valabilă pentru $Re < 2300$.

Varianta adimensională este o formă atipică a relației Hagen-Poiseuille, dar surprinzătoare și captivantă prin capacitatea de a genera o corespondență între concepte și fenomene aparent distincte.

Sisteme atipice de unități fundamentale

Sistemul de unități Ohnesorge

Sistemul Ohnesorge este un sistem de unități bazat pe trei proprietăți de material ale fluidelor: densitate, viscozitate și tensiune superficială – v. Fardin et al. (2022).

Putem exemplifica pentru răspândirea unei picături cu diametrul D pe un substrat solid hidrofil. De regulă, frontul fluid avansează radial respectând o lege de tip putere,

$$d \propto t^a, \quad (361)$$

unde d este diametrul cercului format de contactul dintre lichid și substrat.

Putem intui forma legii de tip putere (practic, puterea la care se ridică t) prin analiză dimensională. Se pot defini trei seturi de unități impuse de dominanța relativă a celor trei eforturi caracteristice (inerțiale, vâscoase și capilare):

- **unități vâsco-inerțiale** (η, ρ, D), în care vom considera doar viscozitatea și densitatea fluidului. Cum raportul η/ρ definește viscozitatea cinematică, practic un coeficient de difuzie a impulsului, putem scrie

$$\frac{\eta}{\rho} \rightarrow \frac{L^2}{T} \rightarrow \frac{d^2}{t} \implies d \propto \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{1/2} t^{1/2}. \quad (362)$$

Dacă vom considera viteza caracteristică dată de raportul d/t , rezultă un grup adimensional caracteristic sub forma numărului Reynolds, $Re = \rho(d/t)d/\eta$;

- **unități vâsco-capilare** (η, γ, D), în care vom considera doar viscozitatea și tensiunea superficială a fluidului. Cum γ/η reprezintă viteza capilară, putem scrie

$$\frac{\gamma}{\eta} \rightarrow \frac{L}{T} \rightarrow \frac{d}{t} \implies d \propto \frac{\gamma}{\eta} t. \quad (363)$$

În acest caz grupul adimensional caracteristic este numărul capilarității,

$$Ca = \eta(d/t)/\gamma;$$

- **unități inerțial-capilare** (ρ, γ, D) , în care vom considera doar densitatea și tensiunea superficială a fluidului. În cazul de față raportul celor două mărimi nu descrie o mărime fizică cunoscută, dar ne va ajuta să descoperim legea de tip putere. Putem scrie

$$\frac{\gamma}{\rho} \rightarrow \frac{L^3}{T^2} \rightarrow \frac{d^3}{t^2} \implies d \propto \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/3} t^{2/3}, \quad (364)$$

din care va rezulta grupul adimensional Weber, $We = \rho(d/t)^2 d/\gamma$.

Până acum am folosit câte două dintre cele trei proprietăți de material. Sistemul Ohnesorge include toate cele trei proprietăți de material, dar și scara spațială caracteristică, dată în acest caz de condiția la limită impusă de diametrul picăturii,

$$Oh = \frac{\eta}{\sqrt{\rho\gamma D}}. \quad (365)$$

Sistemul Ohnesorge redefinește cele trei mărimi de bază ale sistemului de unități de măsură (masă, lungime și timp) pornind de la cele trei proprietăți de material (ρ, η, γ) . Relația funcțională va include

$$(\rho, \eta, \gamma, m_{Oh}, l_{Oh}, t_{Oh}) \quad (366)$$

Prin calcul vom găsi

$$\Pi_1 = \rho^a \eta^b \gamma^c m_{Oh} \rightarrow \Pi_1 = \frac{\gamma^3 \rho^2 m_{Oh}}{\eta^6} \rightarrow m_{Oh} = \frac{\eta^6}{\gamma^3 \rho^2}, \quad (367)$$

$$\Pi_2 = \rho^a \eta^b \gamma^c l_{Oh} \rightarrow \Pi_2 = \frac{\gamma \rho l_{Oh}}{\eta^2} \rightarrow l_{Oh} = \frac{\eta^2}{\gamma \rho}, \quad (368)$$

$$\Pi_3 = \rho^a \eta^b \gamma^c t_{Oh} \rightarrow \Pi_3 = \frac{\gamma^2 \rho t_{Oh}}{\eta^3} \rightarrow t_{Oh} = \frac{\eta^3}{\gamma^2 \rho}. \quad (369)$$

Plecând de la acest sistem, putem defini o serie de mărimi fizice intrinseci fluidelor, independente de cinematică sau de condițiile la limită. Spre exemplu:

- viteza Ohnesorge, care se poate obține împărțind lungimea Ohnesorge la timpul Ohnesorge,

$$V_{Oh} = \frac{l_{Oh}}{t_{Oh}} = \frac{\gamma}{\eta}, \quad (370)$$

relație care definește viteza capilară;

- accelerația Ohnesorge, care se poate obține împărțind viteza Ohnesorge la timpul Ohnesorge,

$$a_{Oh} = \frac{V_{Oh}}{t_{Oh}} = \frac{\gamma^3 \rho}{\eta^4}; \quad (371)$$

- forța Ohnesorge, știind că $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (MLT^{-2}),

$$F_{Oh} = m_{Oh} l_{Oh} t_{Oh}^{-2} \rightarrow F_{Oh} = \frac{\eta^2}{\rho}, \quad (372)$$

relație pe care am obținut-o anterior și care descrie forța cu care se poate acționa asupra unui corp pentru a-l deplasa printr-un fluid la numere Reynolds unitare (același ordin de mărime pentru forțele de inerție și forțele de frecare vâscoasă);

- efortul Ohnesorge, care se poate obține împărțind forța Ohnesorge la aria Ohnesorge,

$$\sigma_{Oh} = \frac{F_{Oh}}{l_{Oh}^2} = \frac{\gamma^2 \rho}{\eta^2} = \frac{\gamma^2}{F_{Oh}}; \quad (373)$$

- energia Ohnesorge, care se poate obține înmulțind forța Ohnesorge cu lungimea Ohnesorge,

$$E_{Oh} = F_{Oh} l_{Oh} = \frac{\eta^4}{\gamma \rho^2}; \quad (374)$$

- puterea Ohnesorge, care se poate obține împărțind energia Ohnesorge la timpul Ohnesorge,

$$P_{Oh} = \frac{E_{Oh}}{t_{Oh}} = \frac{\eta \gamma}{\rho}. \quad (375)$$

Sistemul de unități Ohnesorge este util pentru a cerceta, dintr-o perspectivă pur intrinsecă, dar unificatoare, fenomene interfaciale diferite precum răspândirea, desprinderea și coalescența picăturilor.

Un sistem de unități bazat pe lungimea capilară

Putem defini (imaginația ne permite!) un nou sistem de unități plecând de la conceptul de lungime capilară. Vom considera egal importante, în desfășurarea unui fenomen fizic, atât forțele masice, cât și forțele de tensiune superficială. În consecință,

$$\text{Bo} \sim 1 \rightarrow \frac{\rho g L^2}{\gamma} \sim 1 \rightarrow L \sim l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (376)$$

Relația obținută definește lungimea capilară, în acest caz va reprezenta și scara spațială caracteristică.

Se caută o scară temporală care să includă, pe lângă proprietățile de material, și accelerația gravitațională. Dacă vom considera ca punct de plecare timpul vâscos, înlocuind scara spațială cu lungimea capilară vom obține

$$t \sim \frac{\eta L}{\gamma} \xrightarrow{L=l_c} t_c \sim \frac{\eta}{\sqrt{\gamma \rho g}}, \quad (377)$$

o scară temporală care include toate cele trei proprietăți de material și accelerația gravitațională!

Procedura va trebui să includă și o redefinire a masei astfel încât să putem închide sistemul de unități. Vom considera produsul dintre densitate și lungimea capilară la puterea a treia,

$$m_c \sim \rho l_c^3 = \sqrt{\frac{\gamma^3}{\rho g^3}}. \quad (378)$$

Noul sistem de unități (M, L, T) va fi format din

$$(m_c, l_c, t_c) \rightarrow \left(\sqrt{\frac{\gamma^3}{\rho g^3}}, \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \sqrt{\frac{\eta^2}{\gamma \rho g}} \right). \quad (379)$$

Un aspect surprinzător este conexiunea cu sistemul de unități Ohnesorge. În acest nou sistem, viteza caracteristică va fi

$$V_c = \frac{l_c}{t_c} = \frac{\gamma}{\eta} = V_{\text{Oh}}, \quad (380)$$

practic viteza capilară sau viteza Ohnesorge obținută anterior în sistemul Ohnesorge. Accelerația se poate obține prin raportul l_c/t_c^2 , ceea ce va implica

$$a_c = \frac{l_c}{t_c^2} = \sqrt{g a_{\text{Oh}}}, \quad (381)$$

media geometrică dintre accelerația gravitațională și accelerația Ohnesorge!

Forța se redefineste conform relației

$$F_c = ma_c = \sqrt{\frac{\gamma^3}{\rho g^2}} a_{Oh}, \quad (382)$$

iar efortul caracteristic unui astfel de sistem va fi

$$\sigma_c = \frac{F_c}{l_c^2} = \frac{\gamma^2 \rho}{\eta^2} = \sigma_{Oh}. \quad (383)$$

De remarcat faptul că în acest sistem de unități, relația ce va redefini efortul este identică cu cea obținută în cazul sistemului Ohnesorge!

Pentru apă, la temperatura de 20°C și presiunea de 1 atm, pentru care cunoaștem $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 72 \text{ mN/m}$, $\eta = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, vom găsi următoarele valori caracteristice: $m_c = 0.63 \text{ mg}$, $l_c = 2.71 \text{ mm}$, $t_c = 37.66 \text{ }\mu\text{s}$, $V_c = 72 \text{ m/s}$, $\sigma_c = 5.17 \text{ MPa}$.

Alometrie și alte legi de scară¹

O relație de tipul

$$f = aM^c, \quad (384)$$

în care M este masa, iar f o altă caracteristică a unui organism (viteza de deplasare, lungimea brațelor, rata de metabolism etc.), definește o relație alometrică. Relația face parte din legile de tip putere, legi extrem de importante pentru analiza de scară. Motivul? Sunt scalabile și păstrează tendința de la o scară la alta! Să luăm un exemplu. Fie

$$f(x) = ax^c, \quad (385)$$

unde a și c sunt constante. Vom modifica scara variabilei x cu un factor constant α . Vom observa faptul că funcția nu se modifică, cu excepția unui factor de scalare care depinde de puterea la care se ridică x ,

$$f(\alpha x) = a(\alpha x)^c = \alpha^c ax^c \rightarrow f(\alpha x) = \alpha^c f(x). \quad (386)$$

Derivata acestei relații în raport cu factorul de scară ne va spune și mai multe. Pentru membrul stâng vom obține

$$\frac{d}{d\alpha}(f(\alpha x)) = \frac{df(\alpha x)}{d(\alpha x)} \frac{d(\alpha x)}{d\alpha} = x \frac{df(\alpha x)}{d(\alpha x)}, \quad (387)$$

iar pentru membrul drept

$$\frac{d}{d\alpha}(\alpha^c f(x)) = c\alpha^{c-1} f(x). \quad (388)$$

Știind că

$$f(\alpha x) = \alpha^c f(x) \rightarrow f(x) = \frac{f(\alpha x)}{\alpha^c}, \quad (389)$$

vom obține

$$\alpha x \frac{df(\alpha x)}{d(\alpha x)} = c f(\alpha x) \quad (390)$$

sau, dacă notăm $X = \alpha x$ și integrăm,

$$X \frac{df(X)}{dX} = c f(X) \rightarrow \frac{df(X)}{f(X)} = c \frac{dX}{X} \rightarrow f(X) = aX^c, \quad (391)$$

care este de fapt funcția putere de la care am plecat!

¹Acest subcapitol nu apare în Cuprins. Este un cadou *ascuns* pentru cei care au ajuns până aici și încă mai vor, cum este cazul Ioanei Răsuceanu și al Victoriei Ploeanu, cărora le mulțumesc pentru recenzie, corectură și sprijin.

Totuși, relația de tip putere nu pare pe deplin justificată din punct de vedere fizic. Putem mai bine! Să presupunem că rata de creștere a unui sistem (spre exemplu un grup de celule) este proporțională cu numărul de elemente existent la acel moment de timp (Gunther, 1975), deci

$$\frac{dS_1}{dt} = c_1 S_1 \rightarrow \ln S_1 = c_1 t + \ln A_1, \quad (392)$$

A_1 fiind o constantă de integrare. Considerând un alt sistem, care crește în același timp cu primul - spre exemplu, un alt organ aflat în competiție pentru resurse, vezi ((Klingenberg & Frederik Nijhout 1998) - și o lege de creștere similară, vom găsi

$$\frac{dS_2}{dt} = c_2 S_2 \rightarrow \ln S_2 = c_2 t + \ln A_2. \quad (393)$$

Eliminând timpul t din cele două relații, vom obține

$$\frac{\ln S_1 - \ln A_1}{c_1} = \frac{\ln S_2 - \ln A_2}{c_2} \rightarrow \left(\frac{S_1}{A_1}\right)^{c_2} = \left(\frac{S_2}{A_2}\right)^{c_1}. \quad (394)$$

Dacă vom nota $c_1/c_2 = c$ și $A_1/A_2^{c_1/c_2} = a$, vom obține

$$S_1 = \frac{A_1}{A_2^{c_1/c_2}} S_2^{c_1/c_2} \rightarrow S_1 = a S_2^c, \quad (395)$$

care este o lege de tip putere, pe care am obținut-o plecând de la considerente fizice. Un alt exemplu de raționament prin similitudine care conduce la o lege de scară vine din biologie. Între două obiecte, corpuri sau sisteme diferite ca mărime, se pot obține următoarele legi de scară prin similitudine geometrică

$$\frac{L_1}{L_2} = \lambda, \frac{A_1}{A_2} = \lambda^2, \frac{V_1}{V_2} = \lambda^3, \quad (396)$$

unde L, A, V reprezintă lungime, arie și volum, λ fiind un factor de scară. Nu întotdeauna cele trei direcții spațiale cresc (sau scad) cu același factor de scară (vezi/caută similitudine afină!). Căutăm o relație care să descrie cum crește în diametru traheea, D , cu masa organismelor M din regnul animal. Pentru animale geometric similare

$$\frac{D_1}{D_2} = \lambda, \frac{M_1}{M_2} = \lambda^3, \quad (397)$$

unde vom presupune că densitatea este o constantă. Eliminând λ vom obține

$$\frac{D_1}{M_1^{1/3}} = \frac{D_2}{M_2^{1/3}} \rightarrow \frac{D}{M^{0,33}} = \text{const.} \rightarrow D \propto M^{0,33}. \quad (398)$$

Prin regresia datelor experimentale se obține un exponent aproximativ egal cu 0,39 (Tenney & Bartlett Jr., 1967), o valoare apropiată de predicția teoretică!

Cum variază cu greutatea proprie forța dezvoltată de un om, forță necesară pentru a ridica o greutate de la sol? Se cunoaște faptul că forța dezvoltată de mușchi este proporțională cu aria secțiunii transversale. Considerând creșterea un proces ce se desfășoară proporțional pe cele trei axe, iar forța totală un efect cumulativ, putem intui că $F \propto L^2$, unde L este o lungime caracteristică a organismului. Cum greutatea este proporțională cu lungimea caracteristică la puterea a treia, $G \sim L^3$, vom obține $F \sim G^{2/3}$. Halterofilii cunosc bine această lege.

Dar să presupunem că exemplele anterioare nu sunt suficient de convingătoare. Mai încercăm unul! Ce relație există între înălțimea maximă pe care o poate atinge un organism în timpul unui salt și masa acestuia? Energia necesară pentru a atinge înălțimea H este

$$E_{salt} \sim M g H, \quad (399)$$

energie potențială gravitațională! Energia necesară saltului este dezvoltată de mușchi. Presupunem (și nu suntem departe de adevăr) că mușchii alcătuiesc doar o parte din masa organismului, $M_m = \beta M$, $\beta < 1$, unde M_m denotă masa mușchilor. Totodată, presupunem că densitatea de energie (energie per kilogram de țesut) ce caracterizează mușchii este aceeași, $e = const.$, indiferent de țesutul muscular considerat. În consecință

$$E_m \sim M_m e \sim \beta M e. \quad (400)$$

Comparând energia necesară saltului (E_{salt}) cu energia dezvoltată de mușchi (E_m) vom obține

$$E_{salt} \sim E_m \rightarrow M g H \sim \beta M e \rightarrow H \propto 1, \quad (401)$$

în ipoteza în care β și e nu variază considerabil în regnul animal. Rezultatul arată că înălțimea maximă pe care o poate atinge un animal prin salt nu depinde de masa acestuia, un rezultat (puțin spus) contraintuitiv! Dar să vedem ce spun datele. Un purice ($M \sim 10^{-3}$ g) atinge o înălțime de 20 cm. Un om ($M \sim 10^5$ g) atinge o înălțime de 60 cm. Pare totuși că ar depinde de masa organismului, dar dacă privim cu atenție observăm că variația de înălțime se desfășoară pe un singur ordin de mărime (de la 20 cm la 60 cm) în timp ce variația de masă se desfășoară pe **8 ordine de mărime** (de la 10^{-3} g la 10^5)! Practic, înălțimea maximă atinsă prin salt nu depinde de masă!

Lăsând în spate acest interludiu matematic, să vedem *raza* de acțiune a legilor de tip putere printr-o selecție cât mai variată:

- legea lui Kleiber, care leagă rata de metabolism bazal de masă (West et al., 1997),

$$B \propto M^{3/4}, \quad (402)$$

- rata de metabolism bazal în cazul creierului – la oameni, v. He & Zhang (2004),

$$B_{creier} \propto M_{creier}^{3/4}, \quad (403)$$

- viteză optimă de deplasare prin aer

$$V \propto M^{1/6}, \quad (404)$$

- legea lui Zipf, care descrie frecvența de apariție a unui cuvânt într-un text, cu r rangul cuvântului, $\alpha \sim 1$ – v. Thurner et al. (2015)

$$\nu(r) \propto r^{-\alpha} \quad (405)$$

- locomoție acvatică, Sw – *swimming number* – v. Gazzola et al. (2014)

$$Re \sim Sw^{4/3}, \text{ respectiv } Re \sim Sw, \text{ dacă } Re > 10^3, \quad (406)$$

sau

$$St \sim Re^{-1/4}, \text{ respectiv } St \sim 0,3, \text{ dacă } Sw > 10^4, \quad (407)$$

- înălțimea atinsă în salt de animalele acvatice; H înălțime, L lungime caracteristică – v. Chang et al. (2019)

$$\frac{H}{L} \sim Fr^2, \quad (408)$$

- metode prin care animalele beau apă; aspirație inerțială – v. Kim & Bush (2012)

$$Re \sim Bo^{1/2}, \quad (409)$$

La final, nu pot decât să sper că exemplele anterioare sunt suficient de grăitoare pentru a *ispiti* cititorul în sensul de a explora și alte legi de tip putere prin care Natura *a ales* să funcționeze, unele încă *așteptând* să fie descoperite.

Index – grupuri adimensionale

- Ar – Arhimede – pag. 27
- At – Atwood – pag. 28
- Bm – Bingham – pag. 28
- Bo – Bond – pag. 26, 27, 39, 65, 73, 78, 80, 81, 86, 91
- C – Courant – pag. 25
- Ca – nr. capilarității – pag. 27, 40, 48, 73, 74, 83, 84
- Dn – Dean – pag. 28
- De – Deborah – pag. 39
- Ec – nr. elastocapilarității – pag. 40
- El – nr. elasticității – pag. 39
- Ek – Ekman – pag. 28
- Eu – Euler – pag. 26, 72, 82
- Fr – Froude – pag. 26, 28, 70, 72, 73, 79, 82, 91
- Gr – Grashof – pag. 41, 42
- La – Laplace – pag. 27, 78
- Ma – Mach – pag. 38
- Ma – Marangoni – pag. 48, 49
- Mo – Morton – pag. 28
- Nu – Nusselt – pag. 41
- Oh – Ohnesorge – pag. 27, 44, 50, 84, 85
- Pe – Péclet – pag. 75, 76, 77
- Pr – Prandtl – pag. 41, 42, 77
- Ra – Rayleigh – pag. 42
- Ri – Richardson – pag. 42
- Re – Reynolds – pag. 9, 10, 12, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 39, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 53, 54, 59, 63, 64, 72, 73, 75, 76, 77, 82, 83, 91
- Ro – Rossby – pag. 28
- Sc – Schmidt – pag. 59
- St – Strouhal – pag. 26, 35, 72, 91
- Ta – Taylor – pag. 28
- Tr – Trouton – pag. 29
- We – Weber – pag. 16, 17, 18, 27, 28, 40, 43, 44, 47, 73, 74, 84
- Wi – Wissenberg – pag. 39, 40
- Wo – Womersley – pag. 72
- Numărul de apariții pentru grupul adimensional Reynolds justifică și titlul subcapitolului dedicat.

Tabela grupurilor adimensionale

c - viteza sunetului	α - difuzivitate termică
c_p - căldură specifică ($p = ct.$)	γ - tensiune superficială
$d, 2R$ - diametru	$\mathcal{D}$ - coeficient de difuzie
g - accelerație gravitațională	η - viscozitate
h - coeficient de transfer termic	η_E - viscozitate extensională
k - conductivitate termică	ν - frecvență
L - lungime caracteristică	ρ - densitate
p - presiune	σ_0 - prag de curgere (Pa)
t_o - timp de observație	τ - timp de relaxare
ΔT - diferență de temperatură	ω - pulsație
V - viteză	Ω - viteză unghiulară

Arhimede	$Ar = \frac{\rho(\rho_c - \rho)gL^3}{\eta^2}$	forțe masice/rezistență la $Re \sim 1$
Atwood	$At = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$	diferență de densitate/sumă
Bingham	$Bm = \frac{\sigma_0 L}{\eta V}$	prag de curgere/eforturi tangențiale
Bond	$Bo = \frac{\Delta\rho g L^2}{\gamma}$	forțe masice/tensiune superficială
Courant	$C = \frac{V\Delta t}{\Delta x}$	viteză curgere/viteză discretizare

Nr. capilarității	$Ca = \frac{\eta V}{\gamma}$	frecare/tensiune superficială
Dean	$Dn = Re \left(\frac{d}{2R} \right)^{1/2}$	inertie/frecare - geometrie curbă
Deborah	$De = \frac{\tau}{t_o}$	timp relaxare/timp observație
Elastocapilaritate	$Ec = \frac{\tau \gamma}{\eta L}$	elastocapilaritate/frecare
Elasticitate	$El = \frac{\tau \eta}{\rho L^2}$	elasticitate+frecare/inertie
Ekman	$Ek = \frac{\eta}{2\rho L^2 \Omega \sin \phi}$	frecare/forțe Coriolis
Euler	$Eu = \frac{p}{\rho V^2}$	forțe presiune/inertie
Froude	$Fr = \frac{V^2}{gL}$	inertie/forțe masice
Grashof	$Gr = \frac{\rho g L^3 (\beta \Delta T)}{\eta^2 / \rho}$	convecție/rezistență la $Re \sim 1$
Laplace	$La = \frac{\rho L \gamma}{\eta^2}$	inertie+capilaritate/frecare
Mach	$Ma = \frac{V}{c}$	viteză/viteza sunetului
Morton	$Mo = \frac{We^3}{Fr Re^4}$	$f(We, Fr, Re)$
Nusselt	$Nu = \frac{hL}{k}$	convecție+conducție/conducție

Ohnesorge	$Oh = \frac{\eta}{\sqrt{\rho\gamma L}}$	frecare/inertie+capilaritate
Péclet	$Pe = \frac{LV}{\mathcal{D}}$	advecție/difuzie
Prandtl	$Pr = \frac{\eta c_p}{k}$	difuzie impuls/difuzie termică
Rayleigh	$Pr = Gr Pr$	timp difuzie/timp convecție
Richardson	$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$	convecție liberă/convecție forțată
Reynolds	$Re = \frac{\rho V L}{\eta}$	inertie/frecare
Rossby	$Ro = \frac{V}{2L\Omega \sin \phi}$	inertie/forțe Coriolis
Schmidt	$Sc = \frac{\rho \mathcal{D}}{\eta}$	difuzie moleculară/difuzie impuls
Strouhal	$Sc = \frac{\nu L}{V}$	forțe nestacionare/inertie
Taylor	$Ta = \frac{\rho \Omega^2 R_1 (R_2 - R_1)^3}{\eta}$	inertie/frecare - rotație
Trouton	$Tr = \frac{\eta_E}{\eta}$	extensie/forfecare
Weber	$We = \frac{\rho V^2 L}{\gamma}$	inertie/tensiune superficială
Weissenberg	$Wi = \frac{\tau V}{L}$	forțe nestacionare/inertie
Womersley	$Wo = L \sqrt{\frac{\omega \rho}{\eta}}$	$f(Re, St)$

Bibliografie

- Abbott, S. (2024), 'Coatings – Marangoni number', <https://www.stevenabbott.co.uk/practical-coatings/marangoni.php>. [Online; accessed 04-July-2024].
- Ashgriz, N. (2011), *Handbook of atomization and sprays: theory and applications*, Springer Science & Business Media.
- Barenblatt, G. I. (1996), *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics: dimensional analysis and intermediate asymptotics*, number 14, Cambridge University Press.
- Barenblatt, G. I. (2003), *Scaling*, Vol. 34, Cambridge University Press.
- Bonert, M. & Saville, B. A. (2010), 'A non-dimensional analysis of hemodialysis', *The Open Biomedical Engineering Journal* **4**, 138.
- Buckingham, E. (1914), 'On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations', *Physical Review* **4**(4), 345.
- Bush, J. (2024), 'Interfacial phenomena – lecture notes', <https://thales.mit.edu/bush/index.php/2021/04/10/18-357-interfacial-phenomena/>. [Online; accessed 06-July-2024].
- Bush, J. W. & Hu, D. L. (2006), 'Walking on water: biolocomotion at the interface', *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38**(1), 339–369.
- Challita, E. J. & Bhamla, M. S. (2024), 'Unifying fluidic excretion across life from cicadas to elephants', *Proceedings of the National Academy of Sciences* **121**(13), e2317878121.
- Chang, B., Myeong, J., Viot, E., Clanet, C., Kim, H.-Y. & Jung, S. (2019), 'Jumping dynamics of aquatic animals', *Journal of the Royal Society Interface* **16**(152), 20190014.
- Clanet, C., Béguin, C., Richard, D. & Quéré, D. (2004), 'Maximal deformation of an impacting drop', *Journal of Fluid Mechanics* **517**, 199–208.

-
- Fardin, M. A., Hautefeuille, M. & Sharma, V. (2022), 'Spreading, pinching, and coalescence: the ohnesorge units', *Soft Matter* **18**(17), 3291–3303.
- Gazzola, M., Argentina, M. & Mahadevan, L. (2014), 'Scaling macroscopic aquatic locomotion', *Nature Physics* **10**(10), 758–761.
- Georgescu, S. C. (2004), 'Comments on Eötvös Number versus Bond Number', https://www.researchgate.net/publication/240310477_Comments_on_Eotvos_Number_versus_Bond_Number#fullTextFileContent. [Online; accessed 6-ianuarie-2025].
- Ghosh, A. (2011), 'Scaling laws', *Mechanics over micro and nano scales* pp. 61–94.
- Gibbings, J. C. (2011), *Dimensional analysis*, Springer Science & Business Media.
- Goldreich, P., Mahajan, S. & Phinney, S. (1999), 'Order-of-Magnitude Physics: Understanding the World with Dimensional Analysis, Educated Guesswork, and White Lies', <https://www.inference.org.uk/sanjoy/oom/book-letter.pdf>. [Online; accessed 13-August-2024].
- Gunther, B. (1975), 'Dimensional analysis and theory of biological similarity', *Physiological Reviews* **55**(4), 659–699.
- He, J.-H. & Zhang, J. (2004), 'Fifth dimension of life and the 4/5 allometric scaling law for human brain', *Cell Biology International* **28**(11), 809–815.
- Ionescu, D. G. (2005), *Introdúcere în mecanica fluidelor*, Editura Tehnică.
- Iqbal, A., Haider, M., Stadlhuber, R. J., Karu, A., Corkill, S. & Filipi, C. J. (2008), 'A study of intragastric and intravesicular pressure changes during rest, coughing, weight lifting, retching, and vomiting', *Surgical Endoscopy* **22**, 2571–2575.
- Kim, W. & Bush, J. W. (2012), 'Natural drinking strategies', *Journal of Fluid Mechanics* **705**, 7–25.
- Klingenberg, C. P. & Frederik Nijhout, H. (1998), 'Competition among growing organs and developmental control of morphological asymmetry', *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences* **265**(1401), 1135–1139.
- Kurth, R. (2013), *Dimensional analysis and group theory in astrophysics*, Elsevier.
- Longo, S. G. et al. (2021), *Principles and applications of dimensional analysis and similarity*, Springer.

-
- Lorenceanu, É. & Quéré, D. (2003), 'Drops impacting a sieve', *Journal of Colloid and Interface Science* **263**(1), 244–249.
- McKinley, G. H. (2005), 'Dimensionless groups for understanding free surface flows of complex fluids', <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/18086>. [Online; accessed 09-Mai-2024].
- McKinley, G. H. (2024), 'Getting the (dimensionless) numbers right', *Nature Chemical Engineering* **1**(1), 116–116.
- Migdal, A. B. & Leggett, A. J. (1977), *Qualitative methods in quantum theory*, W.A. Benjamin, Reading, Mass.
- Needham, D. & Hochmuth, R. M. (1990), 'Rapid flow of passive neutrophils into a 4 μm pipet and measurement of cytoplasmic viscosity', *J. Biomech. Eng.* **112**(3), 269–276.
- Papanastasiou, T., Georgiou, G. & Alexandrou, A. N. (2000), *Viscous fluid flow*, CRC press.
- Poole, R. (2012), 'The Deborah and Weissenberg numbers', *Rheol. Bull* **53**(2), 32–39.
- Pope, S. (2015), *Turbulent flows*, Cambridge University Press.
- Purcell, E. M. (1977), 'Life at low Reynolds number', *American Journal of Physics* **45**(1), 1–13.
- Pătrașcu, C. (2021), Instabilitatea și dinamica interfețelor lichid – lichid sub acțiunea forțelor de capilaritate, PhD thesis.
- Pătrașcu, C. (2024a), *Dinamica fluidelor în sisteme biologice*, Politehnica Press.
- Pătrașcu, C. (2024b), *Procese de transport prin capilaritate*, Politehnica Press.
- Quéré, D. (2022), 'Some thoughts on style in science', *Physical Review Fluids* **7**(12), 120501.
- Rayleigh, L. (1915), 'The principle of similitude', *Nature* **95**, 66–68.
- Richard, D., Clanet, C. & Quéré, D. (2002), 'Contact time of a bouncing drop', *Nature* **417**(6891), 811–811.
- Rodd, L. E., Scott, T. P., Cooper-White, J. J. & McKinley, G. H. (2005), 'Capillary break-up rheometry of low-viscosity elastic fluids', *Applied Rheology* **15**(1), 12–27.

-
- Roselli, R. J. & Diller, K. R. (2011), *Biotransport: principles and applications*, Springer Science & Business Media.
- Ruiz-Gutiérrez, É., Armstrong, S., Lévêque, S., Michel, C., Pagonabarraga, I., Wells, G. G., Hernández-Machado, A. & Ledesma-Aguilar, R. (2022), 'The long cross-over dynamics of capillary imbibition', *Journal of Fluid Mechanics* **939**, A39.
- Ruzicka, M. (2008), 'On dimensionless numbers', *Chemical Engineering Research and Design* **86**(8), 835–868.
- Saranjam, N., Chandra, S., Mostaghimi, J., Fan, H. & Simmer, J. (2016), 'Orange peel formation due to surface tension-driven flows within drying paint films', *Journal of Coatings Technology and Research* **13**, 413–426.
- Selby, H. D., Hanson, S. K., Meininger, D., Oldham, W. J., Kinman, W. S., Miller, J. L., Reilly, S. D., Wende, A. M., Berger, J. L., Inglis, J. et al. (2021), 'A new yield assessment for the trinity nuclear test, 75 years later', *Nuclear Technology* **207**(sup1), 321–325.
- Sonin, A. A. (2001), *The physical basis of dimensional analysis*, Cambridge, Department of Mechanical Engineering, MIT.
- Sonin, A. A. (2004), 'A generalization of the π -theorem and dimensional analysis', *Proceedings of the National Academy of Sciences* **101**(23), 8525–8526.
- Taylor, G. I. (1950*a*), 'The formation of a blast wave by a very intense explosion i. theoretical discussion', *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **201**(1065), 159–174.
- Taylor, G. I. (1950*b*), 'The formation of a blast wave by a very intense explosion.-ii. the atomic explosion of 1945', *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **201**(1065), 175–186.
- Tenney, S. & Bartlett Jr, D. (1967), 'Comparative quantitative morphology of the mammalian lung: trachea', *Respiration Physiology* **3**(2), 130–135.
- Turner, S., Hanel, R., Liu, B. & Corominas-Murtra, B. (2015), 'Understanding zipf's law of word frequencies through sample-space collapse in sentence formation', *Journal of the Royal Society Interface* **12**(108), 20150330.
- Tong, D. (2024), 'Fluid mechanics – lecture notes', <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/fluids.html>. [Online; accessed 04-July-2024].

-
- Truskey, G. A., Yuan, F. & Katz, D. F. (2004), *Transport phenomena in biological systems*, Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, USA.
- Vogel, S. (1998), 'Exposing life's limits with dimensionless numbers', *Physics Today* **51**(11), 22–27.
- Wang, K. et al. (2019), 'Characterization of cytoplasmic viscosity of hundreds of single tumour cells based on micropipette aspiration', *Royal Society Open Science* **6**(3), 181707.
- West, G. B., Brown, J. H. & Enquist, B. J. (1997), 'A general model for the origin of allometric scaling laws in biology', *Science* **276**(5309), 122–126.
- White, F. M. & Majdalani, J. (2006), *Viscous fluid flow*, Vol. 3, McGraw-Hill New York.
- White, F. M., Ng, C. & Saimek, S. (2011), *Fluid mechanics*, McGraw-Hill, cop.
- Wilczek, F. (2005), 'On absolute units, i: Choices', *Physics Today* **58**(10), 12–13.
- Xie, X., Samaei, A., Guo, J., Liu, W. K. & Gan, Z. (2022), 'Data-driven discovery of dimensionless numbers and governing laws from scarce measurements', *Nature communications* **13**(1), 7562.
- Yang, P. J., LaMarca, M., Kaminski, C., Chu, D. I. & Hu, D. L. (2017), 'Hydrodynamics of defecation', *Soft Matter* **13**(29), 4960–4970.